

ACTA PHYSICA AUSTRIACA

UNTER MITWIRKUNG DER
ÖSTERREICHISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
HERAUSGEGEBEN VON
K. W. FRITZ KOHLRAUSCH † U. HANS THIRRING
GRAZ WIEN

SCHRIFTFÜHRUNG
PAUL URBAN
GRAZ

8. BAND 3. HEFT
MIT 22 ABBILDUNGEN UND 1 TAFEL
(AUSGEGEBEN IM APRIL 1954)



WIEN
SPRINGER-VERLAG
1954

Die **Acta Physica** erscheinen zwanglos nach Maßgabe der einlaufenden Arbeiten in Heften wechselnden Umfanges, die zu Bänden von 400 bis 500 Seiten vereinigt werden. Arbeiten können in den Sprachen der internationalen Kongresse erscheinen.

Manuskripte sind entweder an die Schriftleitung der „Acta Physica Austriaca“, Prof. Dr. PAUL URBAN, Graz, Universitätsplatz 5, oder an den Springer-Verlag, Wien I., Mölkerbastei 5, zu richten; **alle geschäftlichen Mitteilungen** an den Springer-Verlag, Wien I., Mölkerbastei 5 Tel. U 26 5 60 Serie Telegrammadresse: Springerbuch Wien.

Grundsätzlich werden nur Arbeiten aufgenommen, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind; der Autor verpflichtet sich, diese auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen. Mit der Annahme und Veröffentlichung des Manuskriptes geht das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder auf den Verlag über. Es ist ferner ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme u. ä. von Heften der Zeitschrift, einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen. Die Autoren erhalten 100 Separata ihrer Arbeit kostenlos und können maximal weitere 100 Separata zum angemessenen Preis beziehen. Die Bestellung muß mit dem dem Fahnenabzug beigelegten Bestellzettel bei der Rücksendung der korrigierten Fahnen erfolgen.

Allgemeine Richtlinien für die Abfassung von Beiträgen: Die Arbeit soll klar und verständlich geschrieben sein. Es ist Rücksicht auf jene Leser zu nehmen, die nicht mit demselben Problem vertraut sind. Auch ohne übermäßige und nicht verantwortbare Breite der Darstellung kann häufig ein eingefügter kleiner Satz dem Leser eine Stunde Nachdenken ersparen. Jede Niederschrift soll ein Ringen um das richtige Wort an der richtigen Stelle sein. Die Herausgeber erachten es als ihre Pflicht, Abhandlungen, die nach ihrem Dafürhalten den üblicherweise zu stellenden Anforderungen in dieser Hinsicht nicht voll entsprechen, zur Umarbeitung zurückzusenden.

Umfang: Obere Grenze etwa ein Druckbogen; längere Abhandlungen sind zu unterteilen.

Äußere Form: Maschinenschrift; einseitig beschriebene, fortlaufend bezifferte Blätter, linksseitig mit breitem freiem Rand.

Titelkopf: Titel der Arbeit (soll bereits unmißverständlich kennzeichnend für den behandelten Gegenstand sein). Darunter der Name des Verfassers mit ausgeschriebenem Vornamen. Darunter Angabe des Institutes, aus dem die Arbeit stammt, oder Privatanschrift des Verfassers; darunter „Mit ... Abbildungen.“

Zusammenfassungen: Der Abhandlung vorangestellt wird eine zusammenfassende Übersicht in Kleindruck. Sie dient als einführender erster Überblick für den Leser und als Vorlage für die Referenten der Referatenblätter. Die Übersicht soll trotz gedrängter Darstellung alles enthalten, was der Verfasser an seiner Arbeit in bezug auf Problemstellung, Methodik und Ergebnisse für unerlässlich zu ihrer Beurteilung hält. Zu einer Beurteilung auch durch den Nichtfachmann!

Tabellen: Die Übersichtlichkeit einer Tabelle und damit das Erreichen ihres Zweckes kann sehr gefördert werden durch Sorgfalt in der Wahl der Überschriften sowohl für die Tabelle als Ganzes als für die einzelnen Zeilen und Kolonnen. Die gewählten Einheiten müssen klar ersichtlich, die Abkürzungen verständlich sein.

Fortsetzung auf der III. Umschlagseite

8. Band/3. Heft.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
FRITZ KOHLRAUSCH †	209
Wagner, J. Prof. Dr. FRITZ KOHLRAUSCH †	210
Haefel, R. Die Strom-Spannungscharakteristiken einer selbständigen Gasentladung im transversalen Magnetfeld	213
Hittmair, O. Das Spektrum von Kristallionen	225
Eder, G. Nukleon-Pion-Wechselwirkungen	234
Tomiser, J. Eigendruckverbreiterung der inversen ZEEMAN-Komponenten der Natrium-D-Linien	276
Reinharz, M., G. Rohringer und E. Broda. Empfindlichkeitsvergleich verschiedener Meßverfahren für Radiokohlenstoff	285
Freese, E. Die Wellengleichungen der Quantenelektrodynamik	289
Buchbesprechungen	309

Fritz Kohlrausch †

Am 17. September 1953 verschied in Graz der Mitbegründer und Herausgeber der *Acta Physica Austriaca*, Prof. Dr. K. W. FRITZ KOHLRAUSCH, über dessen Leben und Bedeutung als Forscher und Lehrer in einem eigenen Aufsatz dieses Heftes berichtet wird.

Darüber hinaus wollen Verleger, Herausgeber und Redakteur der *Acta Physica Austriaca* mit einigen persönlichen Worten ihres verstorbenen Arbeitskameraden gedenken. FRITZ KOHLRAUSCH, mit dem einer von uns schon seit seiner Studienzeit in kollegialer Freundschaft verbunden war, hat in seiner stillen ruhigen Art, mit seinem feinen Humor und dem durchgeistigten Gelehrtenkopf jenem Temperamentstypus angehört, der unter den Größten unserer Zeit wohl am reinsten durch MAX PLANCK verkörpert war. Seine unbestechliche Objektivität, das sichere Taktgefühl und der Charme seiner Herzenswärme verliehen der Zusammenarbeit mit ihm einen besonderen Reiz und mit aufrichtiger Besorgnis sahen wir in den letzten Jahren, wie der körperlich bereits schwer Leidende in gewissenhafter Erfüllung seiner Pflichten die Riesearbeit bewältigte, die ihm Beruf und nebenberufliche Tätigkeit auferlegten. In dieser Zeit als mehrjähriger Dekan seiner Fakultät, als Vorstand des physikalischen Institutes der Grazer Technischen Hochschule und dazu als experimenteller Forscher auf die Fortführung seiner Lebensarbeit, der systematischen Untersuchung des SMEKAL-RAMAN-Effekts, bedacht, war er an sich schon genug belastet und hat nun daneben noch in relativ kurzer Zeit fünf Bände seiner wertvollen Vorlesungen über ausgewählte Kapitel der Physik herausgebracht.

Eine unerbittliche Krankheit hat diesem der Arbeit und Pflichterfüllung gewidmeten Leben ein Ende gemacht, und die Unterzeichneten sahen ihm hier mit tiefer Trauer das letzte Lebewohl.

OTTO LANGE

HANS THIRRING

PAUL URBAN

Prof. Dr. Fritz Kohlrausch †

Am 17. September vorigen Jahres starb in Graz Dr. K. W. FRITZ KOHLRAUSCH, o. ö. Professor für Physik und Vorstand des Physikalischen Institutes der Technischen Hochschule Graz. Mit ihm schied von uns ein akademischer Lehrer von besonderem Format und ein namhafter Forscher, dessen Verdienste zu würdigen in diesem Rahmen nur in großen Zügen möglich ist.

Am 6. Juli 1884 zu Gstettenhof bei Türnitz in Niederösterreich als Sohn des Agrarchemikers Dr. OTTO KOHLRAUSCH und dessen Ehefrau AMALIE geboren, entstammt er einem Geschlecht, das schon Physiker mit hochgeachteten Namen hervorbrachte. Sein Großvater RUDOLF KOHLRAUSCH war Mitarbeiter von WILHELM WEBER bei der berühmten Bestimmung der „WEBERSchen Zahl“ und das Wirken seines Onkels FRIEDRICH KOHLRAUSCH war ja bekanntlich für die gesamte Experimentalphysik von fundamentaler Wichtigkeit. Der Enkel, bzw. Neffe hat durch sein Lebenswerk dem Namen KOHLRAUSCH zweifellos eine neue Bedeutung hinzugefügt.

Seine Studien an der Universität Wien schloß FRITZ KOHLRAUSCH 1907 mit der Promotion zum Dr. phil. ab. 1908 wurde er für zwölf Jahre Assistent am II. Physikalischen Institut der Universität Wien bei F. S. EXNER, dessen Einfluß auf sein weiteres Leben unverkennbar ist. KOHLRAUSCH war einer der letzten der „EXNER-Schule“, die sich einen weit über die Grenzen unseres Landes hinausreichenden Namen erwarb. Nach seiner Habilitation (1911) auch Dozent für Akustik an der Musikakademie in Wien, wurde er 1915 zur Kriegsdienstleistung eingezogen und bald mit der silbernen Tapferkeitsmedaille II. Klasse und dem Karl-Truppenkreuz ausgezeichnet; bereits 1916 aber mußte er wegen eines im Felde erlittenen Ohrendefektes vom Militärdienst enthoben werden. In der folgenden Zeit war er außer als Assistent und Privatdozent an der Universität Wien noch als Honorarprofessor für Farbenlehre an der Kunstgewerbeschule und als wissenschaftlicher Mitarbeiter an der graphischen Lehr- und Versuchsanstalt in Wien tätig.

Im Jahre 1920 folgte er einem Ruf als ordentlicher Professor an die Technische Hochschule Graz, wo er in den Jahren 1922/23 und 1946—48 das Amt eines Dekans, 1923/24 das des Rektors dank seiner vorbildlichen Korrektheit und seiner überaus stark ausgeprägten Persönlichkeit in mustergültiger Weise ausübte.

Seine Arbeitsgebiete waren zunächst Luftelektrizität, Farbenlehre, Linsenoptik und vor allem Radioaktivität. Diesen entsprechend er-

folgten die ersten Monographien, bzw. Handbuchbeiträge: mit SCHWEIDLER: Atmosphärische Elektrizität, Graetz, Handbuch der Elektrizität und des Magnetismus (1923); Radioaktivität, im Physikalischen Handwörterbuch (1924, bzw. 1931); Probleme der γ -Strahlung (1927) und schließlich Band XV des Handbuches für Experimentalphysik, Radioaktivität, welches mit zu den besten Bänden dieses Werkes zählt.



Internationalen Ruf erwarb er, als er sich 1928 der Erforschung der Molekülstruktur mit Hilfe des SMEKAL-RAMAN-Effektes zuwandte. Man wird RAMANS erster Beobachtung den Charakter einer Zufallsentdeckung kaum absprechen können, eines aber steht ohne Zweifel fest: Den Wert dieser Methode für das Studium von Molekülstrukturfragen nicht nur klar erkannt, sondern sie auch systematisch zum Ziele geführt zu haben, ist das Verdienst von FRITZ KOHLRAUSCH. Zunächst von der ROCKEFELLER Foundation, dann von der Deutschen Forschungsgemeinschaft

großzügig unterstützt, konnte er einen Stab von Physikern und Chemikern zur Mitarbeit heranziehen; im Laufe der Zeit deren mehr als vierzig. Die wissenschaftliche Ausbeute war entsprechend: Fast 300 Veröffentlichungen aus dem von ihm geleiteten Institut und als Krönung dieser Leistung seine Bücher "Der SMEKAL-RAMAN-Effekt (1930), der Ergänzungsband dazu (1938) sowie die RAMAN-Spektren (1943)", die wohl noch lange die Standardwerke dieses Fachgebietes bleiben werden.

Mit dem Kriegsende versiegten die Mittel, der Großteil seiner Mitarbeiter ging verloren, die Arbeitskraft seines Institutes fiel dadurch und durch die Schwierigkeiten der Nachkriegszeit empfindlich zurück, ein schwerer Schlag für KOHLRAUSCH, dessen einziger Lebensinhalt die wissenschaftliche Forschung war. Wohl nur diese Umstände und der Büchermangel der ersten Nachkriegszeit bewogen ihn, seine ausgezeichnete Vorlesung niederzuschreiben, wozu man ihn früher vergeblich gedrängt hatte. Es sind dies die in den Jahren 1947—1949 erschienenen „Ausgewählten Kapitel aus der Physik“, deren fünfter und letzter Band „Aufbau der Materie“ ein besonderes Meisterwerk darstellt.

Eine lange Reihe von Auszeichnungen und Ehrungen waren die Anerkennung seiner wissenschaftlichen Tätigkeit: Silberne Voigtländer-Medaille (1920), LIEBEN- (1922) und HAITINGER-Preis (1928), korrespondierendes (1929), bzw. ordentliches Mitglied der Akademie der Wissenschaften in Wien (1939), ordentliches Mitglied der Akademie der Naturforscher in Halle (1938), Ehrenmitglied der Indischen Akademie der Wissenschaften in Bangalore (1939), korrespondierendes Mitglied der königlichen Akademie der Wissenschaften in Bologna (1942), Ehrenmitglied des Vereines österreichischer Chemiker (1952) und Ehrenvorsitzender der Österreichischen Physikalischen Gesellschaft (1953).

KOHLRAUSCH war ein Mann von seltener innerer Vornehmheit, jede Aufmachung oder Reklame persönlicher Art war ihm zutiefst zuwider. Von zurückhaltender, ja verschlossener Natur, pflegte er selbst seinen Freunden nicht mitzuteilen, was sein Inneres bewegte. Zu ihm hingegen konnte jeder mit allen Sorgen kommen, für alle wußte er Rat und Hilfe. Voll Verständnis für die Schwächen anderer, legte er an sich selbst den strengsten Maßstab, stets mußte das Persönliche, auch das Familiäre hinter dem Sachlichen zurücktreten. 188 Einzelpublikationen, nur zum geringen Anteil mit Mitarbeitern, zeugen von seinem rastlosen Arbeits-eifer und nie erlahmenden Fleiß, welche ihm, ebenso wie sein hohes Pflichtgefühl, nie Schonung, kein Ausruhen gestatteten, auch nicht in den Tagen fortschreitender Krankheit.

Mit KOHLRAUSCH verlor die Technische Hochschule Graz eine ihrer hervorragendsten Persönlichkeiten; die Lücke, die sein Tod riß, wird man schließen müssen, ausfüllen kann man sie nicht.

J. WAGNER, Graz.

Die Strom-Spannungscharakteristiken einer selbständigen Gasentladung im transversalen Magnetfeld.

Von

R. Haefer, Graz.

Mit 4 Abbildungen.

(Eingelangt am 21. Oktober 1953.)

Zusammenfassung.

Messungen der Strom-Spannungscharakteristiken einer selbständigen Gasentladung bei Verwendung einer zylindrischen Elektrodenanordnung mit konaxialem Magnetfeld und Argon als Füllgas werden für den Druckbereich 10^{-1} bis unterhalb 10^{-7} Torr mitgeteilt. Die Charakteristiken sind fallend oder steigend, je nachdem ob der Druck größer oder kleiner als einige 10^{-3} Torr ist. Theoretische Betrachtungen über den Einfluß von Raumladungen und Stufenprozessen auf die Ionisierungsverhältnisse sowie die Berechnung der Laufzeiten der Elektronen und Ionen führen im Einklang mit den Experimenten zu folgendem Ergebnis: Bei Drucken $>$ einige 10^{-3} Torr hat die Entladung den Charakter einer Glühentladung mit positiver Raumladung. Bei Drucken $< 10^{-3}$ Torr liegt eine selbständige Entladung im Hochvakuum mit folgenden Merkmalen vor: Charakteristik bei gegebener, hinreichend hoher magnetischer Induktion: $U - U_z = \text{const. } I/p$, negative Raumladung, Elektronenringstrom, für die Aufbauzeit ist die Laufzeit der Elektronen bestimmend.

Einleitung.

In zwei vorangehenden Arbeiten [1, 2] ist der Zündvorgang einer Gasentladung unter der Einwirkung eines transversalen Magnetfeldes im Druckbereich 10 bis 10^{-8} Torr experimentell untersucht und theoretisch auf der Grundlage der TOWNSENDschen Vorstellung des Lawinenaufbaues behandelt worden. Für eine Reihe von Anwendungen selbständiger Entladungen im transversalen Magnetfeld, von denen an späterer Stelle die Rede sein soll, ist aber außer der Kenntnis der Zündkennlinien auch diejenige der Strom-Spannungscharakteristiken erforderlich. Strom-Spannungscharakteristiken von Gasentladungen im transversalen Magnetfeld für den Druckbereich 10^{-1} bis 10^{-2} Torr sind bereits von PENNING [3] mitgeteilt worden. Sie haben den für Glühentladungen ohne Magnetfeld typischen Verlauf. Da sich aber die Entladung im transversalen Magnetfeld bis zu den kleinsten herstellbaren

Drucken herab betreiben läßt [1, 2], ist die Untersuchung der Strom-Spannungscharakteristiken nunmehr auch auf das Gebiet niedriger Drucke, wo bisher keine Messungen vorliegen, auszudehnen. Dies ist der Gegenstand der vorliegenden Arbeit.

I. Theoretische Betrachtungen.

1. Einfluß von Raumladungen und Stufenprozessen.

Das Erfülltsein der TOWNSENDSchen Zündbedingung, deren Herleitung ohne Berücksichtigung von Raumladungen geschieht, bedeutet bekanntlich, daß der Aufbau der Entladung raumladungsfrei vor sich geht [4]. Nach der TOWNSENDSchen Beziehung, die nicht nur die Zünd- sondern auch die Stationaritätsbedingung der Entladung nach erfolgter Zündung darstellt, sollte die Strom-Spannungscharakteristik horizontal verlaufen, das heißt, für alle Werte des Stromes sollte gelten: Spannung $U =$ Zündspannung U_z . In Wirklichkeit beobachtet man aber bei den Entladungen sowohl ohne wie mit Magnetfeld ein hiervon abweichendes Verhalten. Bei den Entladungen ohne Magnetfeld sind hierfür zwei Ursachen bekannt:

a) Im Gebiet kleiner Stromdichten i ($< 10^{-6}$ A/cm²; TOWNSEND-Gebiet) spielen Raumladungen noch keine Rolle, wohl aber nach SCHADE [5] bereits Prozesse der stufenweisen Ionisation¹, deren Häufigkeit i^2 proportional ist. Die durch Berücksichtigung der Stufenprozesse erweiterte TOWNSENDSche Theorie führt dann zu einer Anfangscharakteristik [5]

$$U - U_z = - \text{const.} \frac{\partial a}{\partial E} \cdot i, \quad (1)$$

welche linear fallend oder steigend ist, je nachdem ob die Änderung der Ionisierungszahl a mit wachsender Feldstärke E positiv oder negativ ist.

b) Als zweite Ursache ist zu nennen, daß bei höheren Stromdichten ($> 10^{-6}$ A/cm²) zusätzlich Raumladungen ins Spiel treten. Diese verändern den Potentialverlauf und damit die Ionisierungsverhältnisse. Einerseits sind aber die Erscheinungen derart komplex, andererseits die mathematischen Schwierigkeiten so groß, daß eine exakte Theorie der Charakteristiken, die der Erfahrung gerecht wird, bisher nicht gelungen ist. Man geht deshalb bei der theoretischen Behandlung halb-empirisch vor, indem man den gemessenen Potentialverlauf zugrunde legt, und gelangt auf diese Weise zu einer wesentlich besseren Übereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung [10].

¹ Solche Prozesse sind: Ionisierung bereits angeregter Atome durch Elektronen- oder Photonenstoß, Auslöschung zweier Anregungszustände (insbesondere metastabiler) unter Ionisierung des einen und Rückführung des anderen Stoßpartners in den Grundzustand.

Ähnlicher Art sind auch die Schwierigkeiten bei einer Theorie der Charakteristiken der Entladung im transversalen Magnetfeld. Da wir den durch die Raumladungen modifizierten Potentialverlauf noch nicht kennen, müssen wir uns mit einigen Überlegungen nur prinzipieller Art begnügen. Wir behandeln deshalb zunächst den Einfluß von Raumladungen und von Stufenprozessen auf die Form der Charakteristik, da anzunehmen ist, daß diese beiden Einflüsse auch bei der Entladung mit Magnetfeld eine Rolle spielen werden. Wir setzen dabei der Einfachheit halber voraus, das elektrische Feld sei bei $i = 0$ homogen; ferner, daß die magnetische Induktion B konstant ist und daß die Abmessungen des Entladungsraumes klein gegen die mittlere freie Weglänge der Elektronen sind.

Einer Überlegung von STEENBECK [11] folgend, nehmen wir an, daß sich die elektrische Feldstärke infolge irgendwelcher eingebrachter Raumladungen von ihrem ursprünglichen Wert der Zündfeldstärke E_z um einen kleinen Betrag Δ unterscheidet, wobei Δ zwar eindeutig vom Abstand x von der Kathodenoberfläche abhängen soll, im übrigen aber beliebige positive und negative Werte annehmen darf: $E = E_z + \Delta(x)$. Dabei wird sich die Elektrodenspannung um den Betrag

$$\Delta U = \int_0^d \Delta(x) dx$$

ändern. Ferner ändert sich die Ionisierungszahl vom ursprünglichen Wert $\alpha(E_z)$ auf

$$\alpha(E_z + \Delta) = \alpha(E_z) + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial E} \right)_{E_z} \Delta + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial E^2} \right)_{E_z} \Delta^2$$

Die Gesamtzahl der ionisierenden Stöße eines an der Kathode startenden Elektrons auf seinem Wege zur Anode ist dann

$$\int_0^d \alpha(E_z + \Delta) dx = \alpha(E_z) \cdot d + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial E} \right)_{E_z} \Delta U + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial E^2} \right)_{E_z} \int_0^d \Delta^2 dx$$

Suchen wir diejenige Änderung der Elektrodenspannung auf, die die Ionisierung im verzerrten Feld wieder auf den ursprünglichen Wert des unverzerrten Feldes bringt

$$\left(\int_0^d \alpha(E_z + \Delta) dx = \alpha(E_z) d, \quad \text{stationärer Zustand} \right),$$

so wird

$$\Delta U = U - U_z = - \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial E^2} \right)_{E_z}}{\left(\frac{\partial \alpha}{\partial E} \right)_{E_z}} \int_0^d \Delta^2 dx$$

Das Integral ist auf alle Fälle positiv und eine Funktion der Raumladungsdichte. Letztere wiederum ist eine Funktion von i/v_x , wobei nach Gl. (4) die für die Ausbildung der Raumladung maßgebende Geschwindigkeit v_x der Elektronen in Richtung des elektrischen Feldes proportional dem Druck p und ferner von E , B und den Abmessungen l , r_k , r_a der Anordnung abhängig ist. Wir erhalten somit

$$U - U_z = -\frac{1}{2} \frac{\left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial E^2}\right)_{E_z}}{\left(\frac{\partial \alpha}{\partial E}\right)_{E_z}} \cdot f\left(\frac{i}{p}, E, B, l, r_k, r_a\right). \quad (2)$$

Ob die Anfangscharakteristik steigend oder fallend ist, hängt von den beiden Differentialquotienten ab. In der Arbeit [1] wurde α/B als Funktion von B/E berechnet und daraus die Zündkennlinie ermittelt. (Abb. 1 *a* und *b*.) Damit sind auch die Differentialquotienten bekannt, deren Verlauf in Abhängigkeit von B/E Abb. 1 *c* zeigt. Je nachdem, auf welchem Abschnitt der Zündkennlinie die Zündspannung liegt, haben wir ein unterschiedliches Verhalten, wie die folgende Tab. 1 lehrt, zu erwarten.

Tabelle 1.

Abschnitt der Zünd- kennlinie	$\frac{\partial \alpha}{\partial E}$	$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial E^2}$	$U - U_z$ nach Gl. (2)	$U - U_z$ nach Gl. (1)	Anfangscharakteristik bei $\lambda \gg l$ infolge	
					Raumladung [Gl. (2)]	Stufenprozessen [Gl. (1)]
1—2	> 0	< 0	> 0	< 0	steigend	fallend
2—3	< 0	< 0	< 0	> 0	fallend	steigend
3—4	> 0	> 0	< 0	< 0	fallend	fallend

Außer dem Einfluß der Raumladung auf den Verlauf der Anfangscharakteristik ist in der Tab. 1 noch der gemäß Gl. (1) zu erwartende Einfluß der Stufenprozesse eingetragen.

Wie bereits erwähnt, ist bei diesen Überlegungen vorausgesetzt worden, daß die mittlere freie Weglänge der Elektronen λ groß gegen die Abmessungen des Entladungsraumes, also z. B. die Länge l des Kathodenzyklinders ist. Ist diese Bedingung hingegen nicht erfüllt ($\lambda \leq l$), so wird die Entladung den Charakter einer Glimmentladung ohne Magnetfeld haben und somit eine durch positive Raumladung bewirkte fallende Charakteristik auch dann zeigen, wenn die Zündspannung auf dem unteren Ast (1 bis 2) der Zündkennlinie liegt. Da nämlich bei einem derartigen Wert der Zündspannung ausschließlich die an den seitlichen Endflächen der Kathode befreiten Elektronen für den Lawinaufbau wirksam sind und diese den zylindrischen Entladungsraum zu-

nächst in axialer Richtung durchheilen, ehe sie auf Zykloidenbögen zur Anode gelangen [2], haben wir ähnliche Verhältnisse vor uns wie bei der Glimmentladung ohne Magnetfeld mit einer Hohlkathode [9].

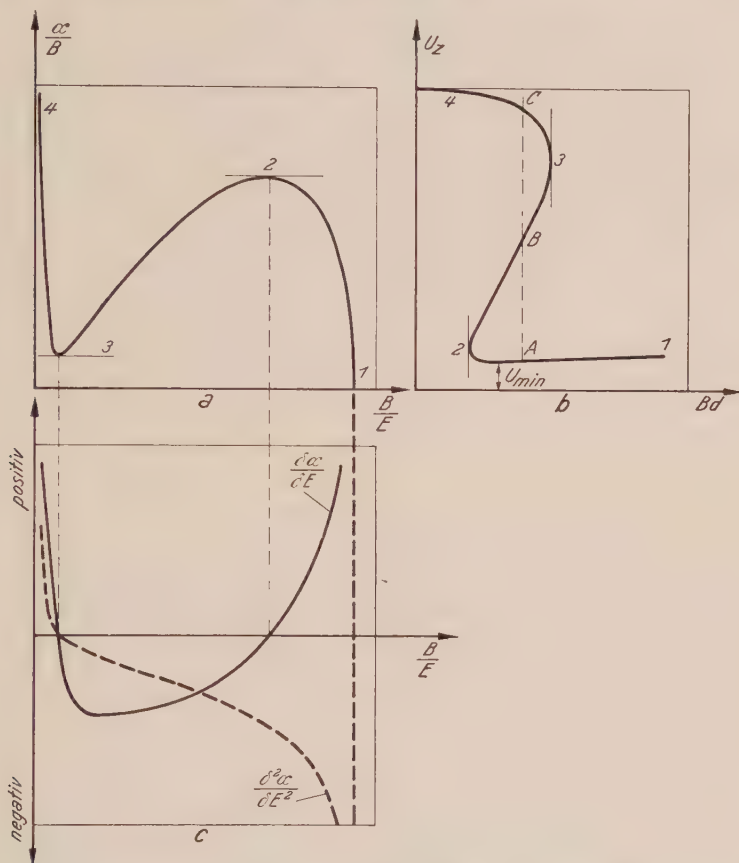


Abb. 1. a) Ionisierungszahl α , bezogen auf die magnetische Induktion B , in Abhängigkeit von B/E . E = elektrische Feldstärke (schematisch).
 b) Aus a) konstruierte Zündkennlinie (schematisch). Die Punkte 1, 2, 3, 4 in b) und a) entsprechen einander.
 c) Aus a) ermittelter Verlauf von $\partial \alpha / \partial E$ und $\partial^2 \alpha / \partial E^2$ in Abhängigkeit von B/E bei konstantem B (schematisch). Man beachte, daß die Differentiation nach E ein entgegengesetztes Vorzeichen ergibt wie die gemäß a) zunächst zu vollziehende Differentiation nach $1/E$.

Ferner haben wir Homogenität des elektrischen Feldes vorausgesetzt. In qualitativer Hinsicht sind aber die Verhältnisse hinsichtlich Ionisierungszahl und Zündkennlinie bei der zylindrischen Elektrodenanordnung, wie sie bei den Experimenten Verwendung findet, die gleichen wie beim homogenen elektrischen Feld [2]. Damit dürften die gewonnenen Gesetzmäßigkeiten in qualitativer Hinsicht auch auf die später zu besprechenden Experimente anwendbar sein.

2. Stabile und labile Charakteristiken.

Da die Zündspannung in einem gewissen Bd -Bereich dreiwertig ist, haben wir an sich bei gegebenem Bd drei verschiedene Charakteristiken mit den Anfangsspannungen U_A , U_B , U_C zu erwarten (Abb. 1 b). Wie PENNING [3] bereits feststellte, ist aber von diesen drei Charakteristiken nur diejenige mit der niedrigsten Anfangsspannung (U_A) zu realisieren. Wird z. B. die Zündung bei U_B oder U_C herbeigeführt, so springt die Entladung sofort in einen Zustand über, der durch einen Punkt (je nach Größe der angelegten Spannung und des Vorwiderstandes) auf der stabilen, mit U_A beginnenden Charakteristik gekennzeichnet ist. Mit diesem Befund ist die in Tab. 1 vermerkte Tatsache im Einklang, daß die mit U_B und U_C beginnenden Anfangscharakteristiken infolge Raumladung fallend sind. Ganz allgemein kann das beobachtete Verhalten mit Hilfe des heuristischen Minimumprinzips von STEENBECK [12] gedeutet werden, das sich auch bei anderen Fragen der Gasentladungen bewährt hat. Es besagt, daß analog zu den Erscheinungen der Mechanik der Zustand kleinster potentieller Energie und somit derjenige kleinster elektrischer Feldstärke der sich tatsächlich einstellende Gleichgewichtszustand ist.

3. Laufzeiten der Elektronen und Ionen.

Um eine Vorstellung darüber zu gewinnen, welcher Art die vorherrschende Raumladung ist, berechnen wir die Laufzeiten der Elektronen und Ionen. Ist die Laufzeit der Elektronen (= Zeit zum Zurücklegen des Weges von der Kathode zur Anode) wesentlich kleiner als die der Ionen, so überwiegt die positive Raumladung der Ionen. Dies ist bekanntlich bei der Glimmentladung ohne Magnetfeld der Fall und führt zur Aufteilung des Potentialverlaufes vor der Kathode. Ist hingegen die Laufzeit der Elektronen wesentlich größer als die der Ionen, so bildet sich eine negative Raumladung aus. Durch eine solche negative Raumladung wird ähnlich wie bei der Hochvakuumtriode mit Glühkathode die elektrische Feldstärke über der Kathode herabgesetzt und somit gewissermaßen den Einfluß der Anode auf die an der Kathode befreiten Elektronen abgeschirmt. Die folgende Rechnung wird für den Fall der zylindrischen Elektrodenanordnung durchgeführt. Da wir den Verlauf des elektrischen Feldes ohne Raumladung zugrunde legen, gilt die Rechnung streng nur bei hinreichend kleinen Strömen.

Das Elektron bewegt sich auf Zykloidenbögen, die durch den Rollkreis vom Durchmesser

$$D = 2 \cdot 10^9 \frac{m E}{e B^2} = \frac{11,35 E}{B^2}$$

(D in cm, E in V/cm, B in Gauß)

erzeugt werden, der sich auf einem Leitkreis abrollt, dessen Radius r ist und dessen Mittelpunkt auf der Achse des Elektrodensystems liegt.

Der Mittelwert der Tangentialkomponente der Geschwindigkeit des Elektrons ist

$$v_t = \frac{E}{10^{-8} B} \left[\frac{\text{cm}}{\text{sec}} \right]. \quad (3)$$

Der nach einer vollständigen Umdrehung um die Anode vom Elektron zurückgelegte Wert ist $2\pi r$. $4/\pi = 8r^2$. Nach Zurücklegen der mittleren freien Weglänge λ erfolgt im Mittel ein Zusammenstoß mit einem Gasatom; es sind hierzu also $\lambda/8r$ Umläufe um die Anode nötig. Die Zeit zwischen zwei Zusammenstößen ist $\pi\lambda/4v_t$. Die in radialer Richtung gemessene Entfernung zwischen zwei Zusammenstößen ist nach [2]: $2D/3$. Die Radialgeschwindigkeit des Elektrons somit

$$v_r = \frac{2D}{3} \frac{4v_t}{\pi\lambda} = \frac{8 \cdot 11,35}{3\pi\lambda} \frac{E^2}{B^3}. \quad (4)$$

Die Laufzeit des Elektrons ist

$$T_{el} = \int_{r'}^{r_a} \frac{dr}{v_r},$$

wobei nach [2], Gl. (11):

$$r' = \frac{U}{B} \sqrt{\frac{11,35}{V_i} \frac{1}{\ln r_k/r_a}}.$$

Da v_r proportional E^2 und somit proportional r^{-2} und ferner $r_a \ll r_k$, kann man als obere Grenze des Integrals $r_a=0$ setzen. (V_i = Ionisierungsspannung des Füllgases).

Unter Berücksichtigung von $\lambda = c/p$ erhält man für die Laufzeit der *Elektronen*

$$T_{el} = \frac{\pi}{8} \sqrt{\frac{11,35}{V_i^{3/2} \ln r_k/r_a}} \frac{10^{-8} c}{p} \frac{U}{p}. \quad (5)$$

Die Elektronenlaufzeit ist, wie zu erwarten, umgekehrt proportional zum Druck p ; ferner proportional zur Anodenspannung, jedoch unabhängig von der Stärke des Magnetfeldes. Für Argon ist $V_i = 15,7$ V und $c = 0,037$, so daß mit den Radien der Röhre $r_k = 1,5$ und $r_a = 0,1$ cm (vgl. II) der Faktor vor U/p $1,8 \cdot 10^{-12}$ beträgt. T_{el} wird dabei in sec gemessen.

Zur Berechnung der Laufzeit der Ionen berücksichtigen wir, daß die Ionen in überwiegendem Maße in Anodennähe gebildet werden; daß ferner der Einfluß des Magnetfeldes auf die Ionen vernachlässigbar gering und die mittlere freie Weglänge groß gegen den Kathodenradius ist. Wir können daher als Laufzeit näherungsweise $2 \times$ Kathodenradius: Endgeschwindigkeit nach Durchfallen der Spannung U setzen. Für Argon ergibt sich dann als Laufzeit der Ionen [13]

² $4/\pi$ = Verhältnis von Bogenlänge der Zykloide zu Umfang des Rollkreises.

$$T_{ion} = \frac{r_k}{1,12 \cdot 10^5} \frac{1}{\sqrt{U}}. \quad (6)$$

Das zahlenmäßige Ergebnis der Rechnung zeigt die folgende Tabelle. Für U ist dabei die in [2] gemessene minimale Zündspannung U_z eingesetzt, da im flach ansteigenden Teil der Charakteristik U nur wenig von U_z verschieden ist.

Tabelle 2.

p Torr	U_z Volt	T_{el}/T_{ion} für $U = U_z$	Raum- ladung	Anfangs- charakte- ristik	T_{el} für $U = 5 \text{ kV [sec]}$	v_t/v_r für $B = 1000 \text{ Gauss}$ $E = 1200 \text{ Volt/cm}$
10^{-2}	360	$0,12^3$	} positiv	fallend	$9 \cdot 10^{-7}$	$3 \cdot 10^2$
10^{-3}	520	1,6			$9 \cdot 10^{-6}$	$3 \cdot 10^3$
10^{-4}	800	30	} negativ	steigend	$9 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^4$
10^{-5}	1130	$5,1 \cdot 10^2$			$9 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^5$
10^{-6}	1460	$7,3 \cdot 10^3$			$9 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^6$
10^{-7}	1800	$1,0 \cdot 10^5$			$9 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^7$
10^{-8}	2150	$1,4 \cdot 10^8$			$9 \cdot 10^{-1}$	$3 \cdot 10^8$

Da bei dieser Betrachtung der Druck wegen seines großen Variationsbereiches die experimentell entscheidende Rolle spielt, können wir sagen, daß die Raumladung positiv oder negativ ist, je nachdem ob der Druck größer oder kleiner als einige 10^{-3} Torr ist.

4. Elektronenringstrom.

Das Verhältnis von Tangential- zu Radialgeschwindigkeit der Elektronen

$$\frac{v_t}{v_r} = \frac{3 \pi c}{8 \cdot 11,35 E} \frac{B^2}{p}$$

nimmt mit abnehmendem Druck zu. Es erreicht, wie die für $B = 1000$ Gauß und $E = 1200 \text{ V/cm}$ für Argon berechneten Zahlen der Tab. 2 zeigen, beträchtlich hohe Werte. Dieses Verhältnis ist andererseits gleich dem Verhältnis der Tangential- zur Radialkomponente der Elektronenstromdichte. Es bildet sich also im Entladungsraum ein Ringstrom von Elektronen aus, dessen Dichte um viele Größenordnungen größer ist, als die Dichte des in radialer Richtung fließenden Elektronenstromes, welcher letzterer gemeinsam mit dem Ionenstrom im Galvanometer gemessen wird. Die Existenz des Elektronenringstromes läßt sich experimentell nachweisen, worüber an späterer Stelle berichtet werden soll. Im Hinblick auf den Ringstrom ähnlich liegen die Verhältnisse beim Magnetron, bei dem H. G. MÖLLER [7] den Elektronenringstrom berechnen und experimentell nachweisen konnte.

³ Bei 10^{-2} Torr ist $\lambda/r_k = 3$, so daß der für diesen Druck berechnete Wert T_{el}/T_{ion} unsicher ist.

II. Experimenteller Teil.

Die experimentellen Einzelheiten sind bereits in der Arbeit [2] beschrieben worden. Die Daten des verwendeten Rohres sind: Kathodendurchmesser 3,0 cm, Anodendurchmesser 0,2 cm, Länge des Kathodenzyllinders 1,5 cm, Elektrodenmaterial Molybdän. Der Kathodenzyllinder ist durch seitliche Endflächen fast vollständig verschlossen. Von den beiden Endflächen besitzt nur die eine eine Bohrung, die gerade zur Einführung der Stabanode ausreicht und außerdem dem Druckausgleich dient. Als Füllgas diente spektralreines Argon. Wegen der Effekte der Gasaufnahme bzw. -abgabe durch die Kathode bei brennender Ent-

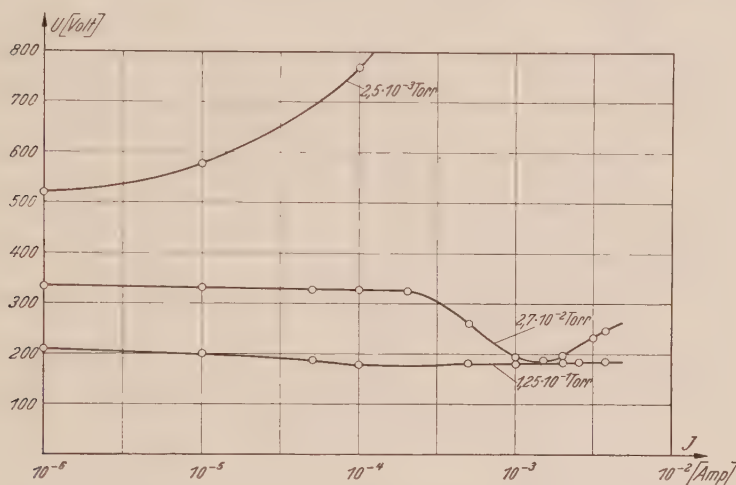


Abb. 2. Strom-Spannungscharakteristiken für den Druckbereich 10^{-1} bis $2 \cdot 10^{-3}$ Torr. Füllgas Argon $B = 1500$ Gauß.

ladung wurden die Messungen so rasch wie möglich und ferner im annähernd „druckkonstanten“ Zustand [6] des Rohres ausgeführt. Trotzdem ließen sich geringe Veränderungen des Druckes (einige %) während der Messung einer Stromspannungscharakteristik nicht vermeiden. Dementsprechend haben auch die bei steigendem und abnehmendem Strom gemessenen Spannungen, die zu einem bestimmten Stromwert gehören, etwas unterschiedliche Werte. Es sind daher die Mittelwerte dieser Spannungen und der Mittelwert des Druckes vor und nach der Messung bei den Charakteristiken Abb. 2 bis 4 angegeben.

Für die Anfangsspannung U_z der Charakteristik ist nach Abschnitt I, 2 nur der untere Ast der Zündkennlinie maßgebend. Liegt U_z auf der Zündkennlinie zwischen dem Punkt 2 und U_{min} (Abb. 1 b), so hängen nicht nur U_z , sondern auch der gesamte Verlauf der Charakteristik verhältnismäßig stark von der magnetischen Induktion B ab. Dennoch ist der Typus der Charakteristiken (fallend oder steigend) dabei

unabhängig vom Wert B . Wird andererseits B so hoch gewählt, daß die Anfangsspannung auf der Zündkennlinie rechts von U_{min} liegt, wo die Zündkennlinie nur sehr flach ansteigend ist [2], so ist der Einfluß von B sowohl auf U_z wie auch auf den Verlauf der Charakteristik nur sehr gering. B wurde daher bei den Messungen Abb. 2 bis 4 einheitlich so hoch gewählt (1500 Gauß), daß auch bei dem kleinsten gemessenen Druck die Anfangsspannung auf der betreffenden Zündkennlinie noch rechts von U_{min} lag. Die maximale Abweichung der magnetischen Induktion von dem genannten Wert innerhalb des Entladungsraumes beträgt 5%.

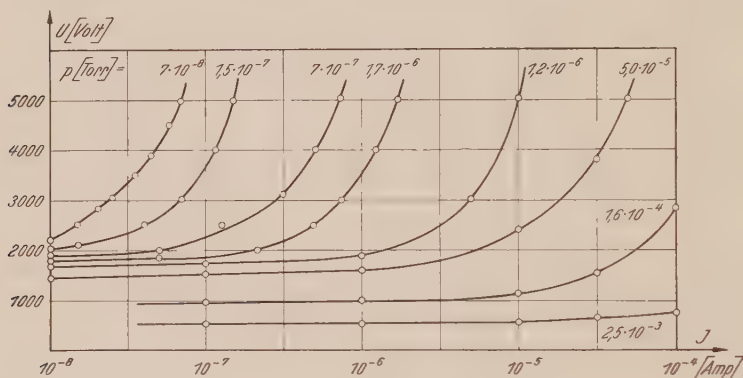


Abb. 3. Strom-Spannungscharakteristiken im Hochvakuumbereich 10^{-3} bis unterhalb 10^{-7} Torr. Füllgas Argon, $B = 1500$ Gauß.

Die Messungen Abb. 2 und 3 lassen erkennen, daß die Charakteristiken einen unterschiedlichen Typus haben, je nachdem ob der Druck größer oder kleiner als einige 10^{-3} Torr ist. Bei Drucken im Bereich 10^{-2} bis einige 10^{-1} Torr zeigen die Charakteristiken bei zunehmendem Strom zunächst einen geringen linearen Abfall⁴, dann einen wesentlich stärkeren Abfall und schließlich nach Durchlaufen eines Minimums ein Wiederansteigen. Diese Charakteristiken haben, wie bereits PENNING [3] fand, den für Glimmentladungen ohne Magnetfeld typischen Verlauf. Der anfängliche lineare Abfall kann von Stufenprozessen herrühren. Das Minimum der Charakteristik kennzeichnet offenbar den Zustand der normalen Glimmentladung und das anschließende Wiederansteigen den Übergang in die anomale Form der Glimmentladung. Für den Charakter einer Glimmentladung spricht auch die in Abschnitt I, 3 gegebene Begründung, daß es im vorliegenden Druckbereich zur Ausbildung einer positiven Raumladung kommt; ferner die Tatsache, daß λ noch ver-

⁴ Dieser lineare Abfall ist zwar in der Darstellung $U - \lg I$ (Abb. 2) nicht klar zu erkennen, wohl aber in der hier nicht wiedergegebenen Darstellung in linearem Maßstab $U - I$.

gleichbar mit der Länge l des Kathodenzylinders ist ($\lambda/l = 0,7$ bei $2,7 \cdot 10^{-2}$ Torr, vgl. Abschnitt I, 1).

Bei Drucken zwischen einigen 10^{-3} Torr und den kleinsten herstellbaren Werten sind die Charakteristiken im ganzen Strombereich steigend. Nach Abschnitt I, 1 muß dieses Verhalten so gedeutet werden, daß in diesem Fall der Einfluß der Raumladung denjenigen der Stufenprozesse überwiegt. Die Raumladung ist nach Abschnitt I, 3 negativ. Die Entladung hat somit einen grundsätzlich anderen Charakter als die zuvor behandelte Form der Glimmentladung. Da man Drucke unterhalb 10^{-3} Torr als dem Hochvakuumbereich zugehörig anspricht, kann man im vorliegenden Fall von einer selbständigen Entladung im *Hochvakuum* unter der Einwirkung eines transversalen Magnetfeldes reden.

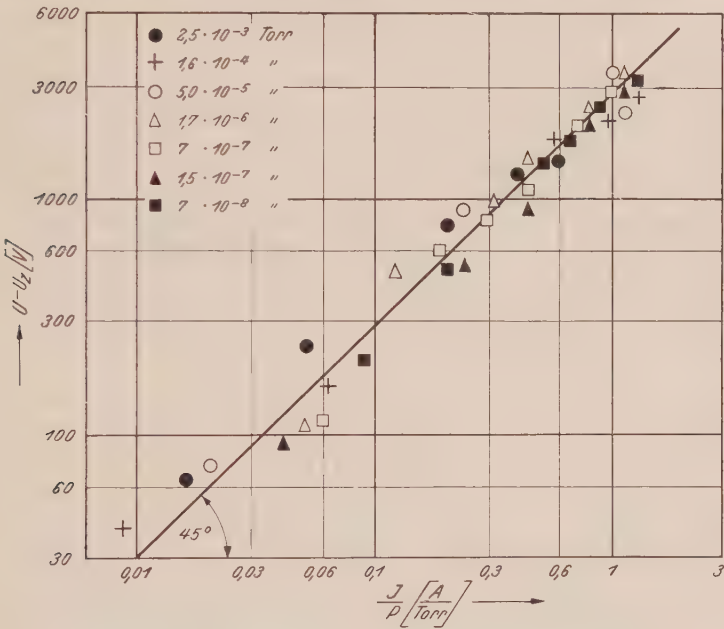


Abb. 4 Strom-Spannungscharakteristiken im Hochvakuumbereich in der Darstellung I/p als Funktion von $U - U_z$. Füllgas Argon, $B = 1500$ Gauß.

Die Charakteristiken im Hochvakuumbereich lassen sich, wie Abb. 4 zeigt, in eine einzige zusammenfassen, wenn man die Darstellung

$$U - U_z = K \cdot \frac{I}{p}$$

wählt. Die Konstante K beträgt bei den vorliegenden Messungen $3 \cdot 10^3 \text{ V} \cdot \text{Torr/A}$. Ihr Wert ist selbstverständlich von den Abmessungen der Anordnung, Elektrodenmaterial, Füllgas und von der magnetischen Induktion abhängig. Das gefundene empirische Gesetz ist mit der

Erwartung [Gl. (2)] im Einklang. Es gilt allerdings, wie weitere Versuche gezeigt haben, offenbar nur bei zylindrischen Elektrodenanordnungen, bei denen $r_a \ll r_k$, $r_k \approx l$ und B hinreichend groß ist.

Ein weiteres Merkmal der Entladung im Hochvakuum besteht darin, daß für die Aufbauzeit der Entladung die Laufzeit der Elektronen bestimmend ist, während es bei der Glimmentladung, wie SCHADE [3] gezeigt hat, die Ionenlaufzeit ist. Wie Tab. 2 zeigt, erreichen die Laufzeiten des Elektrons bei niedrigen Drucken im Vergleich zu den bei magnetfeldfreien Entladungen geläufigen Werten ungewöhnlich hohe Beträge. Eine rohe experimentelle Bestätigung der Laufzeitberechnung ergab sich durch folgenden Versuch: Man kann die Entladung bei nicht zu niedrigen Drucken auch mit Wechselspannung betreiben. Da die Anordnung nur dann zündet, wenn der Außenzylinder Kathode ist [3], wird die Entladung während jeder zweiten Halbwelle neu gezündet. Ein radioaktives Präparat sorgt dafür, daß immer eine gewisse Anzahl von Ladungsträgern vorhanden ist und daß statistische Zündverzögerungen somit nicht vorhanden sind. Mit dem beschriebenen Rohr war mit 50 period. Wechselspannung von 5 kV effektiv ein Zünden innerhalb einer Halbwelle (10^{-2} sec Dauer) in Argon nur bis zu einem Druck von $3 \cdot 10^{-6}$ Torr herab möglich. Nehmen wir der Einfachheit halber an, die Spannung sei während der Halbwelle konstant gleich 5 kV, so beträgt bei dem genannten Druck die Laufzeit nach Tab. 2 $T_{el} = 3 \cdot 10^{-3}$ sec. Nun sind aber zum vollständigen Aufbau einer Entladung mehrere „Ionisierungsspiele“ erforderlich [3], so daß die gefundene untere Druckgrenze für den Betrieb mit 50 period. Wechselspannung verständlich ist.

Graz, Rechbauerstr. 12.

Literatur.

1. R. HAEFER, Acta Physica Austriaca **7**, 52, 1953.
2. R. HAEFER, Acta Physica Austriaca **7**, 251, 1953.
3. F. M. PENNING, Physica **3**, 873, 1936.
4. R. SCHADE, ZS. f. Phys. **104**, 487, 1937.
5. R. SCHADE, ZS. f. Phys. **108**, 353, 1938.
6. H. SCHWARZ, ZS. f. Phys. **117**, 23, 1941 und **122**, 437, 1944.
7. H. G. MÖLLER, Hochfrequ. Techn. u. El. Akustik **47**, 115, 1936 und Grundlagen der Hochfrequenztechnik, 1942, S. 155.
8. KNOLL-OLLENDORFF-ROMPE, Gasentladungstabellen, 1935, S. 14.
9. M. J. DRUYVESTEYN und F. M. PENNING, Rev. of Modern Phys. **12**, 139, 1940.
10. v. ENGEL-STEENBECK, Elektrische Gasentladungen II, 1934, S. 71.
11. v. ENGEL-STEENBECK, Elektrische Gasentladungen II, 1934, S. 51.
12. v. ENGEL-STEENBECK, Elektrische Gasentladungen II, 1934, S. 142.

Aus dem Institut Poincaré, Paris.

Das Spektrum von Kristallionen.

Von

Otto Hittmair.

(Eingelangt am 27. Oktober 1953.)

Es wird eine Übersicht gegeben über die Behandlung des Kristallionenspektrums mit gruppentheoretischen Methoden, die von BETHE und OPECHOWSKI entwickelt wurden. Besonders zu berücksichtigen ist dabei die KRAMERS-Entartung, die für die Auswahlregeln auch bei rein elektrischen Feldern wichtig ist. Ihr Zusammenhang mit der Operation der Zeitumkehr, den WIGNER aufgezeigt hat, wird in übersichtlichem Formalismus dargelegt.

1. Die gruppentheoretische Methode.

Die Elektronenübergänge der Kristallionen seltener Erden erzeugen Linienspektren von einer Schärfe, wie sie sonst nur Gasen und Dämpfen eigen sind. Das hat seinen Grund darin, daß die unvollständige 4 *f*-Schale der seltenen Erden durch die kompletten 5 *s*- und 5 *p*-Schalen gegen das Feld der Nachbarionen abgeschirmt wird. Nichtsdestoweniger erzeugt aber das Kristallfeld eine Linienaufspaltung, die sich qualitativ auf gruppentheoretische Weise verstehen läßt. Ist der Einfluß des Kristallfelds vergleichbar oder stark gegenüber dem inneren Feld des Ions — Fälle, die etwa bei den Salzen der Eisenreihe verwirklicht sind —, so führen Reduktionen, die man dem jeweiligen Störungsansatz entsprechend modifiziert hat, zum Ziele. Für die Auswahlregeln der Elektronenübergänge ist es außerdem wichtig, der KRAMERS-Entartung Rechnung zu tragen. Sie sagt im wesentlichen aus, daß in rein elektrischen Feldern — magnetische Felder können wir im Kristall vernachlässigen — die Terme ungerader Elektronenanzahl immer entartet sind. Bei gerader Elektronenanzahl können einfache Terme vorkommen.

Der HAMILTON-Operator für die Elektronen des freien Ions ist invariant gegenüber Drehungen und Spiegelungen mit dem Kern als Zentrum. Bedeutet also *T* eine dieser Transformationen und setzt man

$$\psi' (q_1, \dots, q_f) = T \psi (q_1, \dots, q_f) = \psi (T^{-1} q_1, \dots, T^{-1} q_f),$$

so gilt neben

$$H\psi = E\psi \quad \text{auch} \quad H\psi' = E\psi'.$$

Insbesondere ist der Eigenwert E derselbe. Die zugehörigen Eigenfunktionen ψ_{JM} (M von $-J$ bis J) transformieren sich bei der Transformation T mittels der Matrizen $D_{M'M}^{(J)}$ der betreffenden Darstellung der Drehspiegelgruppe.

$$T\psi_{JM} = \sum_{M'} D_{M'M}^{(J)} \psi_{JM'}$$

Wird nun die Isotropie des Raumes durch ein Kristallfeld bestimmter Symmetrie gestört, so wird die Zahl der Transformationen, die den HAMILTON-Operator invariant lassen erheblich eingeschränkt, da die Symmetrie des Kristalls aus dem Kontinuum der äquivalenten Lagen des Ions eine diskrete Auswahl trifft. Ebenso wird natürlich aus der Zahl der Matrizen $D_{M'M}^{(J)}$ eine Auswahl getroffen. Diejenigen von ihnen, die mit den Symmetriebedingungen des Kristalls verträglich sind, können auf eine Form gebracht werden, in der sie sich aus den Matrizen der verschiedenen Darstellungen Γ_i der betreffenden Kristallgruppe zusammensetzen. Man sagt, die Darstellung $D^{(J)}$ sei bezüglich der Darstellungen Γ_i reduzibel. Die Transformationen jeder dieser Darstellungen Γ_i lassen den HAMILTON-Operator invariant. Die Eigenfunktionen, die gemäß einer dieser Darstellungen transformieren, transformieren unter sich und gehören zu einem bestimmten Eigenwert E_i . Wenn also keine zufällige Entartung vorliegt, spaltet der Term E des ungestörten Ions im Kristall in ebenso viele Teilterme E_i auf, als irreduzible Bestandteile Γ_i bei der Reduktion von $D^{(J)}$ auftreten.

Wie im Falle des freien Ions wohl bekannt ist, multipliziert sich die ψ -Funktion eines Zustandes bei Inversion entweder mit $+1$ oder mit -1 . Man nennt den entsprechenden Term entweder gerade oder ungerade. Diese Eigenschaft der Parität bleibt dem Term nun unter allen Umständen erhalten. Das heißt bei Aufspaltung des Terms durch ein äußeres Feld kann es nicht vorkommen, daß plötzlich eine Komponente die entgegengesetzte Transformationseigenschaft bei Inversion aufweist. Ein gerader Term des freien Ions zerfällt im Kristall in lauter gerade Kristallterme, ein ungerader in lauter ungerade. Bei dieser Sachlage ist es klar, daß das Hinzufügen oder Wegnehmen der Inversion bei der Kristallgruppe für die Termanzahl keine Rolle spielen kann. Es verdoppelt sich zwar mit der Zahl der Klassen auch die Zahl der Darstellungen, aber nur jeweils eine Hälfte, die geraden oder die ungeraden, werden vom Term benützt. Kommt die Inversion in der Kristallgruppe („Kristallklasse“) vor, dann lassen sich die Symmetrieeoperationen in zwei Kategorien von je gleich viel Elementen zusammenfassen: die reinen Drehungen einerseits und die Spiegelungen und Drehspiegelungen andererseits. Die reinen Drehungen bilden dabei einen Normalteiler der Gruppe. Für die Frage der Term aufspaltung kann man sich also auf diesen Normalteiler beschränken.

BETHE [1] hat 1929 die Term aufspaltung in Kristallen gruppentheoretisch behandelt. Eine Vervollständigung der BETHESchen Arbeit ist die von OPECHOWSKI [2] über Kristalldoppelgruppen. In ihr wird die Zweideutigkeit der Darstellungen $D^{(J)}$ bei halbzahligem J in ihrer Auswirkung auf die Reduzibilität systematisch untersucht.

2. Kramersentartung und Zeitumkehr.

Einen wichtigen Beitrag zur Frage der Term entartung leistete KRAMERS [3], indem er nachwies, daß in rein elektrischen Feldern — und das ist der Fall, mit dem wir uns befassen — die Terme ungerader Elektronenzahl immer entartet sind, während bei gerader Elektronenzahl einfache Terme vorkommen können. WIGNER [4] hat diese Entartung auf die Operation der Zeitumkehr zurückgeführt. Kehrt man die Zeitrichtung um, vertauscht man also Vergangenheit mit Zukunft, so bleiben die Größen, die entweder die Zeit nicht oder nur in gerader Potenz enthalten, ungeändert, während die anderen ihr Vorzeichen wechseln. Die Impuls- und Spinvektoren ändern also ihre Vorzeichen, während die Ortsvektoren ungeändert bleiben. Die HAMILTON-Funktion ist also gegen diese Symmetrieoperatoren invariant, wenn sich die Energie bei Umkehrung der Elektronenumläufe und ihrer Spinrichtungen nicht ändert. Das ist der Fall, wenn das Ion keinen äußeren Kräften unterworfen ist, aber auch wenn es sich um rein elektrische Felder handelt, da diese nur an der mittleren Ladungsverteilung angreifen. In einem Magnetfeld dagegen ändert sich die Energie, da sich zugleich mit der Zeit auch die magnetischen Momente umkehren. Im Spezialfall homogener Felder ist diese Tatsache wohlbekannt: Im Magnetfeld spaltet ein Term in $2J + 1$ Komponenten auf, während im elektrischen Feld die Komponenten mit entgegengesetzt gleichem M -Wert zusammenfallen. Bei ungerader Elektronenanzahl sind hier also alle Terme doppelt entartet ($M = \pm 1/2, \pm 3/2, \dots$), bei gerader Elektronenanzahl ($M = 0, \pm 1, \dots$) gibt es eine Ausnahme: der Term $M = 0$ ist einfach.

Bezeichnet man mit K den Operator der Zeitumkehr, so gilt für ein Elektron

$$K H(r, p, s) K^{-1} = H(r, -p, -s) = H' \quad (1)$$

Der HAMILTON-Operator eines Ein-Elektronen-Systems kann nun ganz allgemein in der Form

$$H(r, p, s) = H_0(r, p) \cdot 1 + H_x(r, p) \cdot s_x + H_y(r, p) \cdot s_y + H_z(r, p) \cdot s_z \quad (2)$$

geschrieben werden mit

$$s_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad s_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad s_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die imaginäre Einheit i kommt im HAMILTON-Operator in $p = \frac{\hbar}{i} \nabla$ und in s_y vor. Wenn der Operator C also den Übergang zum Konjugiert-Komplexen darstellt, so erhält man

$$C H C^{-1} = H^* = H_0(r, -p) \cdot 1 + H_x(r, -p) \cdot s_x - H_y(r, -p) \cdot s_y + H_z(r, -p) \cdot s_z \quad (3)$$

Übt man nun noch auf H^* den Operator $i s_y$ aus, so erhält man H' in der Form (1) mit gespiegelter Zeitachse.

$$i s_y C H C^{-1} (i s_y)^{-1} = H_0(r, -p) \cdot 1 - H_x(r, -p) \cdot s_x - H_y(r, -p) \cdot s_y - H_z(r, -p) \cdot s_z \quad (4)$$

$K = i s_y C$ ist also der gesuchte Operator der Zeitumkehr. Erweitert auf ein n -Elektronensystem wird er entsprechend zu $K = i^n s_{y_1} \dots s_{y_n} C$.

Wir beweisen nun den Satz: Systeme mit ungerader Elektronenanzahl haben in elektrischen Feldern mindestens zweifach entartete Terme.

Wir wissen, daß H in diesem Falle bei K invariant ist. Damit keine Entartung bezüglich der Operation K vorliegt, müssen die Funktionen ψ und $\psi' = K\psi$ linear abhängig sein. Daher also

$$\psi' = K\psi = a\psi, \quad (5)$$

wo a eine komplexe Zahl ist.

$$K^2\psi = K\psi' = K a\psi = a^* K\psi = |a|^2 \psi \quad (6)$$

Nun ist aber

$$K^2 = (i^n s_{y_1} \dots s_{y_n} C)^2 = i^{2n} \cdot 1 = (-1)^n \cdot 1 \quad (7)$$

Somit erhält man

$$|a|^2 = (-1)^n. \quad (8)$$

Das ist aber nur für gerade n möglich. Im Falle ungerader Elektronenanzahl besteht also bestimmt keine lineare Abhängigkeit und daher liegt Entartung bezüglich K vor.

Die Fälle gerader Elektronenanzahl, die keine Entartung aufweisen, zeichnen sich durch fehlendes magnetisches Moment aus. Ein Magnetfeld, das die K -Entartung aufhebt, muß ja diese Terme einfach lassen.

Für die Auswahlregeln und die Polarisation der Strahlung ist es entscheidend, ob die beteiligten Terme entartet sind oder nicht. Unter diesem Gesichtspunkt ist die KRAMERS-Entartung also auch für rein elektrische Felder wichtig.

3. Die Reduktion der Kugeldrehgruppe.

Bekanntlich gibt es 32 Kristallklassen oder Punktgruppen, die sich aus den Elementen der Drehung und Drehspiegelung bilden lassen. Diese 32 Kristallklassen verteilen sich aber auf einige wenige Symmetriegruppen, denen sie Klasse für Klasse entsprechen und mit denen sie daher gemeinsame Darstellungen haben. Es sind dies die zyklischen Gruppen, die Diedergruppen, die Tetraeder- und die Oktaedergruppe.

Eine Kristallachse kann vom trivialen Fall der Einzähligkeit abgesehen nur 2-, 3-, 4- oder 6-zählig sein. Dies ist eine Folge des Gesetzes der rationalen Flächenstellung. Dementsprechend gibt es je nach der Zähligkeit der Hauptachse vier zyklische und vier Diedergruppen.

Die Einteilung in sieben Kristallsysteme hat keine direkte Beziehung zum Gruppencharakter. Es werden dabei einzelne Symmetriegruppen zu Systemen zusammengefaßt.

Wenn C_i und C_k zwei Klassen irgendeiner Gruppe bedeuten, so ist ihr Produkt eine Summe von Klassen.

$$C_i \cdot C_k = \sum_{l=1}^r c_{ikl} C_l \quad (1)$$

Der Index l durchläuft alle r Klassen der Gruppe und die Koeffizienten c_{ikl} sind entweder Null oder positive ganze Zahlen. Transformiert man nämlich die linke Seite mit irgend einem Element aus der Gruppe, so vollzieht sich nur eine Permutation der Elemente in den Klassen C_i und C_k . Die rechte Seite ändert sich also auch nicht. Eine Summe von Gruppenelementen aber, die genau ihre Konjugierten enthält, ist eine Summe von Klassen. Die Koeffizienten c_{ikl} geben an, wie oft jede Klasse C_l in dieser Summe enthalten ist.

Für die Charaktere folgt aus Gl. (1)

$$h_i h_k \chi_i \chi_k = \chi_1 \sum_{l=1}^r c_{ikl} h_l \chi_l \quad (2)$$

mit denselben Koeffizienten c_{ikl} . h bedeutet die Anzahl der Gruppenelemente in einer Klasse und χ_1 der Charakter der Einheitsmatrix, ist gleich der Dimension n der Darstellung. Von der Summe der Quadrate dieser Dimensionszahlen weiß man, daß sie gleich der Anzahl g der Gruppenelemente ist. Es gilt also

$$\sum_{l=1}^r n_l^2 = g. \quad (3)$$

Diese Zerlegung ist bei den Symmetriegruppen immer eindeutig. Nachdem nun also die Anzahl und die Dimension der Darstellungen durch (3) bekannt ist, und die Gruppenstruktur außerdem die Zahlen h und c_{ikl} in (2) bestimmt, kann man sich mittels (2) ein Gleichungssystem für die Darstellungscharaktere aufstellen, das diese zu berechnen gestattet.

Die Charaktere der Kugeldrehgruppe sind für die $2J + 1$ -dimensionale Darstellung $D^{(J)}$ bekanntlich

$$\chi^{(J)}(\Phi) = \frac{\sin\left(J + \frac{1}{2}\right)\Phi}{\sin\frac{1}{2}\Phi} \quad (4)$$

Φ ist dabei der Drehwinkel um die beliebig gewählte Drehachse.

Um nun die eingangs skizzierte Reduktion der Kugeldrehgruppe bezüglich einer bestimmten Symmetriegruppe durchzuführen, beschränkt man den Drehwinkel Φ auf die Werte, die er gemäß den Symmetrioperationen der Gruppe annehmen kann. Das ergibt ebensoviele Größen $\chi^{(J)}(\Phi_i)$, als die Symmetriegruppe Klassen enthält. Da nun eine reduzible Darstellung einer Gruppe sich auf eine und nur eine Weise in ihre irreduziblen Bestandteile zerlegen läßt, hat man nur zu bestimmen, welche Charaktersysteme der Symmetriegruppe man zueinander ein- oder mehrfach addieren muß, um das reduzible System $\chi^{(J)}(\Phi_i)$ zu erhalten.

4. Die Kristalldoppelgruppen.

Wenn die Aufspaltung durch das Kristallfeld klein gegen die Spin-Bahn-Wechselwirkung ist (siehe nächstes Kapitel!), so spaltet jede Multipllettkomponente für sich im Kristallfeld auf, das heißt man hat den Gesamtdrehimpuls $J = L + S$ bei der Reduktion der Kugeldrehgruppe zu betrachten. Bei gerader Termmultiplizität ist J halbzahlig.

Für halbzahlige J ist nun die Darstellung $D^{(J)}$ der Kugeldrehgruppe zweideutig. Einer Drehung um den Winkel Φ entsprechen nämlich in diesem Falle zwei Charaktere:

$$\chi(\Phi) = \frac{\sin\left(J + \frac{1}{2}\right)\Phi}{\sin\frac{1}{2}\Phi}, \quad J + \frac{1}{2} \text{ ganzzahlig.}$$

Betrachtet man den Winkel $\Phi + 2\pi$, der für die Drehgruppe offenbar mit Φ identisch ist, so erhält man

$$\chi(\Phi \pm 2\pi) = \frac{\sin\left(J + \frac{1}{2}\right)\Phi}{-\sin\frac{1}{2}\Phi} = -\chi(\Phi).$$

Die Charaktere ändern also bei einer Drehung um 2π ihr Vorzeichen. Eine Ausnahme bildet die Drehung um π bei der die Darstellung eindeutig ist im Falle der Kugeldrehgruppe.

$$\chi(\pi) = \chi(3\pi) = 0$$

Diese Zweideutigkeit der Darstellungen der Kugeldrehgruppe bedingt eine Zweideutigkeit der Kristalldrehgruppen, die in ihnen als irreduzible Bestandteile enthalten sind. Um alle diese Darstellungen der Kristalldrehgruppe zu erhalten, führt man ein Element R ein, das die Drehung um 2π darstellt. Man macht also die Fiktion, daß der Kristall nicht bei einer Drehung um 2π , sondern erst bei einer Drehung um $4\pi = R^2 = E$ in sich übergeht. Die so entstehende Gruppe wird Kristalldoppelgruppe genannt. BETHE vergleicht ihre Konstruktion mit der einer RIEMANNschen Fläche zur Untersuchung mehrdeutiger Funktionen. Durch

Multiplikation mit R begibt man sich auf das obere Blatt, von dem man erst wieder nach einem vollen Umlauf zum ursprünglichen Wert auf dem unteren Blatt zurückkehrt. Die Kristalldoppelgruppe umfaßt doppelt so viele Elemente wie die einfache Kristalldrehgruppe, aber im allgemeinen nicht doppelt so viele Darstellungen wie diese, da der Drehung um π eine eindeutige Darstellung entsprechen kann.

Die strenge Definition des Doppelgruppenbegriffes mit den entsprechenden Darstellungen stammt von OPECHOWSKI [2]. Die unitären unimodularen Transformationen von zwei komplexen Variablen bilden bekanntlich eine zweideutige Darstellung der Kugeldrehgruppe. Jedem Element der Kugeldrehgruppe entsprechen zwei Elemente der Gruppe u_2 , die sich durch das Vorzeichen voneinander unterscheiden. Den g Elementen der Kugeldrehgruppe, die die Kristalldrehgruppe bilden, entsprechen also $2g$ Elemente von u_2 . Diese Gruppe definiert durch ihre Multiplikationstafel die Kristalldoppelgruppe. Aus den Beziehungen in dieser Tafel folgt, daß für jede Doppelgruppe

$$\chi(A) = -\chi(A R),$$

wie wir das bereits im Sonderfall der Kugeldoppelgruppe für beliebiges J gesehen haben. Die Charaktere der Klassen C und $C' = C \cdot R$ sind also Null oder nur bis auf das Vorzeichen voneinander verschieden. In der Doppelgruppe der Kugel entspricht der Drehung um eine einzige Klasse und der zugehörige Charakter ist notwendigerweise gleich Null. Dies besagt nun nicht, daß der Drehung um π auch in allen Kristalldoppelgruppen eine einzige Klasse und somit der Charakter Null zukommt. In der Tat ist dafür, daß Drehungen um π von der Zweideutigkeit ausgenommen sind, notwendig, daß zwei aufeinander senkrechte Achsen existieren, die Drehungen um π zulassen.

Bei der Charakterbestimmung treten in den Symmetriegruppen auch komplexe Charaktere auf. Es ist klar, daß sie zu konjugiert-komplexen Charaktersystemen gehören müssen, die immer nur zusammen auftreten. Aus diesem Grunde spaltet z. B. bei Tetraedersymmetrie der Term $J = 3/2$ in zwei Teilterme auf, während bei Oktaedersymmetrie dieser Term wie auch $J = 1/2$ und der P -Term nicht aufspalten.

5. Vergleich des Kristallfeldes mit den inneratomaren Feldern.

Im letzten Kapitel haben wir bereits auf die Rolle hingewiesen, die das Verhältnis zwischen der Aufspaltung durch das Kristallfeld und jener durch die Spin-Bahnwechselwirkung spielt. Wir haben hier nach BETHE drei Fälle zu unterscheiden:

1. Die Wirkung des Kristallfeldes ist groß gegenüber der COULOMB-schen Wechselwirkung der Elektronen. Ihre Koppelung ist dann in erster Näherung aufgehoben. Die Elektronen im freien Ion sind durch ihre Quantenzahl n_i und l_i charakterisiert. Die l_i -Terme spalten auf. In zweiter Näherung wird die Elektronenwechselwirkung und schließlich noch die Spin-Bahnwechselwirkung für die Multiplettaufspaltung

berücksichtigt. Haben also zwei Elektronen die azimutalen Quantenzahlen l und λ , so werden zuerst ihre Darstellungen d_l und d_λ ausreduziert (kleine Buchstaben für einzelne Elektronen):

$$d_l = \sum a_{lk} \gamma_k, \quad d_\lambda = \sum a_{\lambda\kappa} \gamma_\kappa$$

Im Kristall ergeben sich also Terme der Energie $E_k + E_\kappa$ und die zugehörigen Eigenfunktionen transformieren sich gemäß $\gamma_k \cdot \gamma_\kappa$. Berücksichtigt man nun in zweiter Näherung die Wechselwirkung zwischen den Elektronen, so spalten diese Terme weiter auf in Terme, die den irreduziblen Bestandteilen von $\gamma_k \cdot \gamma_\kappa$ entsprechen.

$$\gamma_k \gamma_\kappa = \sum \beta_{k\kappa}^i \Gamma_i$$

Unter dem Einfluß der Spin-Bahnwechselwirkung spalten die Γ_i -Terme entsprechend ihrer Multiplizität weiter auf.

2. Die Kristallaufspaltung ist zwar groß gegen die Multipliett-aufspaltung, aber klein gegenüber der COULOMBSchen Elektronenwechselwirkung. Diese wird also schon in nullter Näherung berücksichtigt. Die so entstehenden Eigenfunktionen transformieren sich nach den D_L :

$$d_l \cdot d_\lambda = \sum_{|l-\lambda|}^{l+\lambda} D_L \quad (S-, P-, D\text{-Term})$$

In erster Näherung vollzieht sich dann die Aufspaltung durch das Kristallfeld

$$D_L = \sum a_{Lm} \Gamma_m$$

und in zweiter Näherung erfolgt die Multipliettaufspaltung durch die Spin-Bahnwechselwirkung:

$$D_S \cdot \Gamma_m = \sum a_{Sm}^r G_r$$

3. Die Kristallaufspaltung ist klein gegenüber der Multipliett-aufspaltung und dem Multipliettabstand. In nullter Näherung sind also sowohl die Elektronenwechselwirkung als auch die Spin-Bahnwechselwirkung berücksichtigt. Die vollständigen Eigenfunktionen transformieren sich gemäß D_J . Unter dem Einfluß des Kristallfeldes erfolgt in erster Näherung eine Aufspaltung entsprechend

$$D_J = \sum a_{Jk} \Gamma_k.$$

6. Polarisation und Auswahlregeln.

Bedeutet Q den Operator einer Multipolkomponente, so wird die Wahrscheinlichkeit eines Quantensprungs $n \rightarrow n'$ (n steht für die Gesamtheit aller Quantenzahlen) folgendermaßen berechnet: Man entwickelt $Q \psi_n$ nach dem Orthogonalsystem der Eigenfunktionen. $Q_{nn'}$,

der Koeffizient von $\psi_{n'}$, bestimmt dann die gesuchte Übergangswahrscheinlichkeit:

$$W = |Q_{nn'}|^2 \frac{4}{3} \frac{\nu^2}{h c^3}.$$

Die Polarisation der Strahlung ist durch die Komponentenwahl des Multipolmoments bestimmt.

Geht man von Kugelsymmetrie zur Kristallsymmetrie über, so sind die ursprünglichen Quantenzahlen, die sich auf die $2J + 1$ -dimensionale Darstellung der Kugeldrehgruppe beziehen, nicht mehr definiert. An ihre Stelle treten nun die sogenannten Kristallquantenzahlen, die die einzelnen Darstellungen der betreffenden Kristalldrehgruppe kennzeichnen. Wir behalten aber für sie die Sammelbezeichnung n und n' bei. Für den Unterschied der Zahlen n und n' gelten nun wie beim kugelsymmetrischen Fall bestimmte Auswahlregeln. Gruppentheoretisch können diese folgendermaßen formuliert werden: Die linke Seite der Entwicklung

$$Q \psi_n = \sum_{n'} Q_{nn'} \psi_{n'}$$

transformiert sich gemäß $\Gamma_Q \cdot \Gamma_n$ in der betreffenden Kristallsymmetrie. Die irreduzible Darstellung $\Gamma_{n'}$, die zum Term $E_{n'}$, bzw. zu $\psi_{n'}$ gehört, muß also unter den irreduziblen Bestandteilen dieses Darstellungsproduktes zu finden sein. Es ist dabei klar, daß die Entartung eines Energieniveaus die Übergänge zu diesem Niveau begünstigt, da die eine zugehörige Eigenfunktion die Auswahlregel erfüllen kann, die die andere nicht befriedigt. In diesem Zusammenhang spielt die KRAMERS-Entartung für die Auswahlregeln der Kristallquantenzahlen eine wichtige Rolle.

Literatur.

1. BETHE, H., Ann. Phys. **3**, 133 (1929).
2. OPECHOWSKI, W., Physica **1**, 552 (1940).
3. KRAMERS, H. A., Proc. Acad. Amsterdam **33**, 559 (1930); KLEIN, M., Am. Journ. Phys. **20**, 65 (1952).
4. WIGNER, E., Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, S. 546 (1932).

Nukleon-Pion-Wechselwirkungen.

Von

G. Eder, Wien

Mit 4 Abbildungen.

(Eingelangt am 28. Oktober 1953.)

Es wird ein Überblick über die theoretische Analyse der vorliegenden Experimente mit Hilfe der pseudoskalaren Mesontheorie gegeben. Dabei werden die Nukleon-Nukleon-Wechselwirkungen, die Einzel-Pionerzeugung und die Pion-Nukleon-Streuung in Betracht gezogen.

Einleitung.

Über die Eigenschaften der Pionen (π -Mesonen) bestehen bereits ausführliche Darstellungen [1, 2]; es kann daher auf eine eingehende Behandlung der grundlegenden Experimente verzichtet werden. Bezüglich des Zwei-Nukleonen-Problems liegen Berichte von MOURHOUSE [3] und FLÜGGE [4] vor: MOURHOUSE betont die feldtheoretischen Grundlagen, während FLÜGGE einen schönen Überblick vom phänomenologischen Standpunkt aus gibt. Über die Erzeugung und Streuung von Pionen berichtete GUNN [5]. Aufgabe dieses Berichtes ist es, einerseits die feldtheoretische Analyse der Experimente nach ihrem neuesten Stand darzustellen; da aber die störungsmäßige Behandlung der Feldtheorie oft zu keiner quantitativen Übereinstimmung mit den Experimenten führt, so soll andererseits auch die phänomenologische Analyse dazu verwendet werden, gewisse Züge der Nukleon-Pion-Wechselwirkung herauszustellen. Auf Grund der Absorption negativer Pionen (π^-) in Deuterium, der Ladungsaustauschstreuung von π^- an Protonen und dem 2γ -Zerfall neutraler Pionen (π^0) kann man schließen, daß die Pionen Spin 0 und ungerade Parität besitzen, das heißt, daß sie durch eine pseudoskalare Feldgröße zu repräsentieren sind.

Zur Beschreibung der kraftfreien Pionen gehen wir daher von folgender differentiellen LAGRANGE-Funktion aus:

$$L_{\pi}^0(x) = -\frac{1}{2}c^2\{\Phi_{|\mu}\Phi_{|\mu} + \mu^2\Phi\Phi\}^1, \quad (1)$$

wo $\mu = m c / \hbar$ ($m \dots$ Pionmasse); $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$ repräsentiert das ladungssymmetrische Mesonfeld. $f|_{\mu} = \partial / \partial x_{\mu} f = \partial_{\mu} f$. Φ_i läßt sich in der Form

$$\Phi_i = \sum_k \frac{\hbar}{\sqrt{2 V E_k}} (a_{i,k} + a_{i,-k}^*) e^{(i/\hbar) \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (2)$$

darstellen [6], wobei V das Normierungsvolumen und $E_k = c \sqrt{(m c)^2 + k^2}$ die Energie eines Pions mit dem Impuls \mathbf{k} ($k = |\mathbf{k}|$) darstellen. a_{ik}^* , a_{ik} sind die Mesonerzeugungs- und Vernichtungsoperatoren mit den Vertauschungsrelationen:

$$[a_{ik}, a_{jk'}^*] = \delta_{ij} \delta_{kk'}. \quad (3)$$

Die freien Nukleonen beschreiben wir durch ein DIRAC-Feld:

$$L_N^0 = -\hbar c \bar{\psi} (\gamma_{\nu} \psi|_{\nu} + \kappa_0 \psi), \quad (4)$$

$$\gamma_{\nu} \psi|_{\nu} + \kappa_0 \psi = 0, \quad (5)$$

wo

$$[\gamma_{\mu}, \gamma_{\nu}] = 2 \delta_{\mu\nu}, \quad \gamma_{\mu}^{\dagger} = \gamma_{\mu}, \quad \bar{\psi} = \psi^{\dagger} \beta, \quad \kappa_0 = M c / \hbar \quad (6)$$

($M \dots$ Nukleonenmasse). Für ψ wählen wir die Darstellung:

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \sum_m a_m^* e^{-(i/\hbar) E_m t} u_m(\mathbf{x}), \quad (7)$$

wobei nach (5) gilt:

$$\frac{c \hbar}{i} (\vec{\alpha} \cdot \text{grad } u_m(\mathbf{x})) + (M c^2 \beta - E_m) u_m(\mathbf{x}) = 0. \quad (8)$$

$$\int d^3 \mathbf{x} u_m(\mathbf{x}) u_{m'}(\mathbf{x}) = \delta_{mm'} \quad (9)$$

$$[a_m, a_{m'}^*]_{+} = \delta_{mm'}. \quad (10)$$

Die Wechselwirkung zwischen Pionen (π) und Nukleonen (N) wird durch

$$L(x) = L_{\pi}^0(x) + L_N^0(x) + L'(x) \quad (11)$$

beschrieben, wobei

$$L' = -H_{N\pi'} = -f c \bar{\psi} \gamma_5 \boldsymbol{\tau} \cdot \Phi \psi \quad (12 a)$$

oder:

$$L' = -\frac{g c}{\mu} \bar{\psi} \gamma_5 \gamma_{\nu} \boldsymbol{\tau} \cdot \Phi|_{\nu} \psi; \quad (12 b)$$

$\gamma_5 = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4$. τ_i sind die isotopen Spinmatrizen. f , bzw. g sind die Kopplungskonstanten für pseudoskalare Theorie mit pseudoskalarer $P S (P S)$, bzw. pseudovektorieller $P S (P V)$ Kopplung.

I. Der isotope Spin.

Wir haben in (12) eine ladungssymmetrische Theorie zugrunde gelegt. Dadurch werden ladungsunabhängige $N - \pi$ -Wechselwirkungen garantiert (natürlich nur soweit, als keine elektromagnetischen Erscheinungen in Betracht gezogen werden). Die Ladungsunabhängigkeit der $N - \pi$ -Wechselwirkungen ist durch verschiedene Phänomene nahegelegt: 1. Nimmt man für den 1S -Zustand gleiche Potentialform für Proton-Proton und Proton-Neutron an, dann ergibt sich bei gleicher Reichweite ein Unterschied in der Potentialtiefe von 1,5—3 % [7, 8]. (Dieser Unterschied kann für ein monotones Potential zwischen Proton (p) und Neutron (n) nach SCHWINGER [9] durch die verschiedene magnetische Dipolwechselwirkung erklärt werden; SALPETER [10] konnte zeigen, daß dieses Argument für ein Potential mit starker Abstoßung bei ($r\mu$) $\ll 1$ nicht mehr gilt, sondern daß man hier bereits relativistische Korrekturen zum Ausgleich des Unterschiedes heranziehen müßte.) 2. Hochenergetische $N - N$ -Streuung: Aus der Ladungsunabhängigkeit der Kernkräfte folgt für das Verhältnis der $p - p$ - und $p - n$ -Streuquerschnitte [$\sigma_{np}(\pi - \delta) \approx \sigma_{np}(\delta)$]: $\sigma_{pp}(90^\circ) \leq 4 \sigma_{np}(90^\circ)$ [11] in Übereinstimmung mit den Experimenten [12—18]: $\sigma_{pp}/\sigma_{pn} = 2,8 \pm 0,5$ für [14]; $3,8 \pm 0,6$ für [15—17]. 3. Für die Pionerzeugung bei Zusammenstößen zweier Nukleonen folgt aus der Ladungsunabhängigkeit [19]: $\sigma(n p \rightarrow d + \pi^0) = 1/2 \sigma(p p \rightarrow \pi^+ + d)$ in Übereinstimmung mit den Messungen von HILDEBRAND [20]. 4. Bei der Erzeugung von π^\pm bei $\alpha(^{12}C, \pi^\pm)$ -Prozessen ergibt sich $\pi^+/\pi^- = 0,72 \pm 0,17$ [21]. (Die Differenz gegen 1 kann auf COULOMB-Effekte zurückgeführt werden.) 5. Gleiche Streuquerschnitte für π^+ und π^- in Deuterium [22].

Nimmt man eine Ladungsunabhängigkeit der verschiedenen nukleonischen Phänomene an, dann lassen sich Relationen zwischen den einzelnen Prozessen herleiten; diese Beziehungen wurden von verschiedenen Autoren behandelt [11, 19, 23—29]. Es soll hier der Formalismus des isotonen Spins kurz entwickelt werden.

Die Ladungszustände der Nukleonen und Pionen kann man durch Vektoren in einem abstrakten Raum, dem isotonen Spinraum, beschreiben. Transformationen in diesem Raum werden durch die Operatoren T und Λ bewirkt. Dabei ist der isotope Spin T durch

$$T = \frac{1}{2} \sum_k \tau^{(k)} \quad (13)$$

gegeben, wo $1/2 \tau^{(k)}$ den isotonen Spin des k -ten Nukleons bedeutet. Der isotope Bahndrehimpuls Λ ist durch

$$\Lambda = \sum_k A_k, \quad A_{k3} = i(a_{1,k} a_{2,k}^* - a_{2,k} a_{1,k}^*), \text{ zyklisch} \quad (14)$$

gegeben; er wirkt also nur auf Pionzustände. Der Operator des gesamten isotopen Drehimpulses $\mathbf{I} = \mathbf{T} + \mathbf{\Lambda}$, \mathbf{T} und $\mathbf{\Lambda}$ entsprechen formal dem Gesamtdrall \mathbf{J} , den Spin \mathbf{S} und dem Bahndrehimpuls \mathbf{L} im Spinraum.

Wegen $\tau_1 \tau_2 = i \tau_3$ zykl. und (13), bzw. (3) und (14) erfüllen \mathbf{T} , $\mathbf{\Lambda}$ und \mathbf{I} die Vertauschungsrelationen

$$[J_1, J_2] = i J_3, \quad \text{zyklisch.} \quad (15)$$

Für alle Operatoren J , welche (15) erfüllen, läßt sich zeigen, daß

$$(J_1 \pm i J_2) |j'_3\rangle = \sqrt{j'(j'+1) - j'_3(j'_3 \pm 1)} |j'_3 \pm 1\rangle; \quad (16 a)$$

dabei sind die Eigenwerte j', j'_3 durch

$$J_3 |j'_3\rangle = j'_3 |j'_3\rangle, \quad J^2 |j'_3\rangle = j'(j'+1) |j'_3\rangle \quad (16 b)$$

bestimmt. Das Symbol $| \rangle$ bedeutet den Zustandsvektor, er wird durch die Eigenwerte jener Operatoren gekennzeichnet, deren Eigenzustand er ist. Für die Eigenzustände von \mathbf{T} , $\mathbf{\Lambda}$ und \mathbf{I} schreiben wir

$$|t'_{\frac{1}{2}}\rangle, |\lambda'_{\frac{1}{2}}\rangle, |i'_{\frac{1}{2}}\rangle.$$

Drehungen im isotopen Spinraum werden durch den gesamten isotopen Spinoperator \mathbf{I} erzeugt, das heißt eine infinitesimale Rotation um die Achse \mathbf{a} wird durch den Operator

$$R_a = 1 + i \delta \mathbf{a} \cdot \mathbf{I} \quad (17)$$

ausgeführt, wo δ den infinitesimalen Drehwinkel bedeutet. Zum Beispiel erleidet Φ durch R_a eine Vektortransformation:

$$R_a \Phi R_a^{-1} = (1 + i \delta \mathbf{a} \cdot \mathbf{\Lambda}) \Phi (1 - i \delta \mathbf{a} \cdot \mathbf{\Lambda}) = \Phi + \delta \mathbf{a} \times \Phi. \quad (18)$$

(Es wurde nur der Anteil $\mathbf{\Lambda}$ von \mathbf{I} angeschrieben, da \mathbf{T} mit $\mathbf{\Lambda}$ und Φ vertauschbar ist.) Ein Vorgang ist dann ladungsunabhängig, wenn er durch eine Matrix M beschrieben wird, welche invariant gegen Drehungen im isotopen Spinraum ist: $R_a M R_a^{-1} = M$, oder mit (17):

$$[M, \mathbf{I}] = 0. \quad (19)$$

Invarianz gegen eine Umlappung der I_3 -Achse um 180° ($p \rightleftharpoons n$) bedeutet Ladungssymmetrie. Die dritte Gl. (19):

$$[M, I_3] = 0 \quad (20)$$

kennzeichnet die Erhaltung des Ladungsoperators

$$Q \equiv e \left(\frac{1}{2} N - I_3 \right) \quad (21)$$

bzw. der Ladung

$$Q \equiv e \left(\frac{1}{2} N - i'_3 \right) \quad (21')$$

(e bedeutet das elektrische Elementarquantum und N die Anzahl der Nukleonen): Aus (20) folgt $I_3 M |i'_3\rangle = i'_3 M |i'_3\rangle$, das heißt: $M |i'_3\rangle$ ist auch Eigenvektor von I_3 , so daß $\langle i'_3 | M | i'_3 \rangle = M_{i'_3, i'_3} \delta(i'_3 - i'_3)$.

M hat also nur für $i'_3 = i''_3$ nichttriviale Übergangselemente. Aus der Invarianz gegenüber Drehungen um die I_1 - und I_2 -Achse folgt nach (19):

$$[M, I_1] = [M, I_2] = 0. \quad (22)$$

Zur Kennzeichnung der einfachsten Ladungszustände unterscheiden wir drei Fälle:

1. Es seien nur Nukleonen vorhanden ($\Lambda = 0$):

a) Ein Nukleon: $t' = 1/2$, $Q = 1/2 \varepsilon (1 - \tau_3)$.

$$t'_3 = \frac{1}{2} : |t_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\rangle = w^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad Q w^+ = 0 \cdot w^+ \quad (n) \quad (23)$$

$$t' = -\frac{1}{2} : |t_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\rangle = w^- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad Q w^- = \varepsilon w^- \quad (p)$$

b) Zwei Nukleonen: $Q = \varepsilon (1 - t'_3)$:

$$t' = 1 : t'_3 = 1 \quad |t_1^1\rangle = w_a^+ w_b^+ \quad (2n)$$

$$t'_3 = 0 \quad |t_0^1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (w_a^+ w_b^- + w_a^- w_b^+) \quad (n, p) \quad (24)$$

$$t'_3 = -1 \quad |t_{-1}^1\rangle = w_a^- w_b^- \quad (2p)$$

$$t' = 0 : t'_3 = 0 \quad |t_0^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (w_a^+ w_b^- - w_a^- w_b^+) \quad (n, p)$$

Die Zustandsvektoren in (23) und (24) sind orthogonal:

$$\langle t_i^i | t_m^k \rangle = \delta_{ik} \delta_{im}.$$

2. Ist nur ein Meson vorhanden ($T = 0$, $\lambda' = 1$, $Q = -\varepsilon \lambda'_3$), so definieren wir zur Kennzeichnung seiner Ladungszustände:

$$\Phi^- = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Phi_1 - i \Phi_2), \quad \Phi^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Phi_1 + i \Phi_2), \quad \Phi^0 = \Phi_3. \quad (25)$$

Daraus folgt mit (3) und (14):

$$[A_3, \Phi^\mp] = \mp \Phi^\mp, \quad [A_3, \Phi^0] = 0. \quad (26)$$

Da

$$\Lambda |0\rangle = 0^1, \quad (27)$$

so wird speziell

$$A_3 |0\rangle = 0 \quad (27')$$

und

$$\Lambda^2 |0\rangle = 0. \quad (27'')$$

Wendet man (26) auf $|0\rangle$ an, so folgt mit (27'):

$$A_3 |\lambda_{-1}^1\rangle = -|\lambda_{-1}^1\rangle, \quad A_3 |\lambda_1^1\rangle = |\lambda_1^1\rangle, \quad A_3 |\lambda_0^1\rangle = 0, \quad (28)$$

wenn wir

$$\Phi^\pm |0\rangle = |\lambda_{\pm 1}^1\rangle, \quad \Phi^0 |0\rangle = |\lambda_0^1\rangle \quad (29)$$

¹ $|0\rangle$ bedeutet den Vakuumzustand.

setzen. Q hat also die Eigenwerte -1 und 0 ; das heißt nach (29), daß Φ^- , Φ^+ , bzw. Φ^0 das Vakuum in einen Zustand überführen, in dem ein positives, ein negatives, bzw. ein neutrales Pion vorhanden ist. Bezüglich der Ladungsabhängigkeit hat (12) die Gestalt

$$w_2^\dagger (\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\Phi}) w_1 = w_2^\dagger \begin{pmatrix} \Phi_3 & \Phi_1 - i & \Phi_2 \\ \Phi_1 & + i \Phi_2 & -\Phi_3 \end{pmatrix} w_1 = w_2^\dagger \begin{pmatrix} \Phi^0 & \sqrt{2} \Phi^- \\ \sqrt{2} \Phi^+ & -\Phi^0 \end{pmatrix} w_1. \quad (30)$$

Wir sehen daraus, daß beispielsweise das Element von (30), welches den Übergang eines Protons in ein Neutron beschreibt, $w^{+\dagger} (\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\Phi}) w^- = \sqrt{2} \Phi^-$, ein positives Pion erzeugt. Ganz analog zu (26) folgt aus (3) und (14): $[A^2, \Phi^i] = \Phi^i$ ($i = +, -, 0$) und daraus mit (27'') und (29): $A^2 |\lambda_i^1\rangle = 2 |\lambda_i^1\rangle$, womit $\lambda' = 1$ bewiesen ist. Wir haben also für ein Pion folgende Zustände:

$$\begin{aligned} \lambda'_3 = \pm 1: & |\lambda'_{\pm 1}\rangle & \text{für} & \pi^\mp \\ \lambda'_3 = 0: & |\lambda'_0\rangle & \text{für} & \pi^0 \end{aligned} \quad (31)$$

3. Sind ein Meson und ein Nukleon vorhanden, dann sind folgende Ladungszustände möglich $[Q = \varepsilon (1 - I_3)]$:

$$\begin{aligned} i' = \frac{1}{2} : i'_3 = -\frac{1}{2} : & |i^{\frac{1}{2}}_{-\frac{1}{2}}\rangle & (p, \pi^0), (n, \pi^+) \\ & \frac{1}{2} : |i^{\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}}\rangle & (n, \pi^0), (p, \pi^-) \\ i' = \frac{3}{2} : i'_3 = -\frac{3}{2} : & |i^{\frac{3}{2}}_{-\frac{3}{2}}\rangle & (p, \pi^+) \\ & -\frac{1}{2} : |i^{\frac{3}{2}}_{-\frac{1}{2}}\rangle & (p, \pi^0), (n, \pi^+) \\ & \frac{1}{2} : |i^{\frac{3}{2}}_{\frac{1}{2}}\rangle & (n, \pi^0), (p, \pi^-) \\ & \frac{3}{2} : |i^{\frac{3}{2}}_{\frac{3}{2}}\rangle & (n, \pi^-) \end{aligned} \quad (32)$$

Addition von Vektoren: Gegeben seien zwei Operatoren

$\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$ und $\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3)$ mit $[A_i, B_k] = 0$. (33)
Ist $|A_a^a\rangle$ Eigenzustand von A^2 und A_3 und $|B_b^b\rangle$ von B^2 und B_3 , dann ist der Zustandsvektor

$$|A_a^a B_b^b\rangle = |A_a^a\rangle |B_b^b\rangle \quad (34)$$

wohl Eigenzustand von $S_3 = A_3 + B_3$, im allgemeinen aber nicht von $S^2 = (\mathbf{A} + \mathbf{B})^2$. Um dies zu erreichen, müssen wir eine Linearkombination von Vektoren (34) bilden:

$$|S_{s_3}^s, A^a, B^b\rangle = \sum_{a_3 b_3} C_{ab}(s, s_3; a_3, b_3) |A_{a_3}^a B_{b_3}^b\rangle. \quad (35)$$

$s(s+1)$ und s_3 sind dabei die Eigenwerte von S^2 und S_3 . $C_{ab}(s, s_3; a_3, b_3)$ sind die CLEBSCH-GORDANSchen Koeffizienten, welche bei CONDON und SHORTLEY [30] tabuliert sind. Wollen wir umgekehrt einen Zustand mit bestimmten Eigenwerten a, a_3, b, b_3 der Teilsysteme durch die Eigenzustände des Gesamtsystems (s, s_3) darstellen, so folgt aus der Orthogonalität der C_{ab} :

$$|A_{a_3}^a; B_{b_3}^b\rangle = \sum_{s, s_3} C_{ab}(s, s_3; a_3, b_3) |S_s^s A^a B^b\rangle. \quad (36)$$

Zum Beispiel ist der Zustand, in dem nur ein n und ein π^0 vorhanden sind, nach (32) aus den Zuständen $|i_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\rangle$ und $|i_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\rangle$ zusammengesetzt, es ist also:

$$|n, \pi^0\rangle = |i_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}, \lambda_0^1\rangle = \sum_{i'=\frac{1}{2}, \frac{3}{2}} C_{1, \frac{1}{2}}\left(i', \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, 0\right) |i_{\frac{1}{2}}^{i'} i^{\frac{1}{2}} \lambda^1\rangle, \\ |n, \pi^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|\sqrt{2}|i_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\rangle - |i_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\rangle), \quad (37 a)$$

analog gilt:

$$|p, \pi^+\rangle = |i_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\rangle, \quad (37 b)$$

$$|p, \pi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|i_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\rangle + |\sqrt{2}|i_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\rangle). \quad (37 c)$$

II. Proton-Neutron-Wechselwirkung.

Sei $V(r)$ ein kugelsymmetrisches Potential zwischen zwei Nukleonen mit den Massen M_1 und M_2 , E ihre Relativenergie und r ihr Abstand. Für die Wellenfunktion ψ des Systems können wir dann die SCHRÖDINGER-Gleichung

$$-(\hbar^2/2M^*)\Delta\psi + V(r)\psi = E\psi \quad (38)$$

ansetzen, wo

$$M^* = M_1 M_2 / (M_1 + M_2) \approx \frac{1}{2} M \quad (39)$$

und E die Energie im Schwerpunktsystem (S. S.) bedeutet. Setzen wir

$$U(r) = (2M^*/\hbar^2) V(r), \quad k^2 = 2M^*E/\hbar^2, \quad (40)$$

dann wird (38) mit

$$\psi(r, \vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} R_l(r) P_l(\cos \vartheta) \quad (41)$$

gelöst, wobei $R_l(r)$ der Gleichung

$$R_l'' + (2/r) R_l' + [k^2 - U(r) - l(l+1)/r^2] R_l = 0 \quad (42)$$

genügt. Ist $U(r) = 0$, dann lautet die allgemeinste Lösung von (42):

$$R_l(r) = c_l j_l(kr) + c_l' n_l(kr), \quad (43)$$

mit

$$j_l(x) = (\pi/2x)^{1/2} J_{l+1/2}(x), \quad n_l(x) = (\pi/2x)^{1/2} J_{-(l+1/2)}(x). \quad (44)$$

Speziell ist

$$\exp(i k r \cos \vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l j_l(kr) P_l(\cos \vartheta) \quad (45)$$

aus solchen Lösungen zusammengesetzt. Ist

$$U(r) = 0 \quad \text{für} \quad r > b, \quad (46)$$

dann hat (42) für $r > b$ und $kr \gg 1$ die Lösung:

$$\bar{R}_l(r) = (A_l/kr) \sin(kr + \delta'_l). \quad (47)$$

Um den Streuquerschnitt zu erhalten, setzen wir für $kr \gg 1$:

$$\psi(r, \vartheta) = \exp(i k r \cos \vartheta) + r^{-1} f(\vartheta) \exp(i k r). \quad (48)$$

Setzen wir in (48) die asymptotischen Entwicklungen

$$\begin{aligned} x j_l(x) &= \cos \left[x - \frac{1}{2} (l+1) \pi \right] \\ x n_l(x) &= \sin \left[x - \frac{1}{2} (l+1) \pi \right] \end{aligned} \quad \text{für} \quad x \gg 1 \quad (49)$$

ein, dann wird mit (41), (45) und (47)

$$A_l = (2l+1) i^l e^{i\delta_l} \quad (50)$$

und

$$f(\vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2ik} (e^{2i\delta_l} - 1) P_l(\cos \vartheta). \quad (51)$$

(Es wurde $\delta_l = \delta'_l + \frac{1}{2}\pi l$ gesetzt.) Der differentielle Wirkungsquerschnitt (W.Q.) lautet somit:

$$d\sigma(\vartheta)/d\Omega = \frac{1}{4} |f(\vartheta)|^2 + \frac{3}{4} |^3 f(\vartheta)|^2 \quad (52)$$

und der totale Wirkungsquerschnitt wird:

$$\sigma = \int d\Omega d\sigma(\vartheta)/d\Omega = (\pi/k^2) \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) [\sin^2(^1\delta_l) + 3 \sin^2(^3\delta_l)]. \quad (53)$$

(52) lautet mit (51) ausführlich:

$$\begin{aligned} d\sigma(\vartheta)/d\Omega &= (1/4 k^2) \sum_{S=1,3} S \left| \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i(^S\delta_l)} \sin(^S\delta_l) P_l(\cos \vartheta) \right|^2 = \\ &= (1/4 k^2) \sum_{l,l'} (^1\delta_l \sin ^1\delta_{l'} \cos ^1\delta_{l'} + \\ &\quad + 3 \sin ^3\delta_l \sin ^3\delta_{l'} \cos ^3\delta_{l'}) P_l P_{l'}. \end{aligned} \quad (54)$$

$(\delta_{l'l'} = \delta_l - \delta_{l'})$. Die oberen Indizes 1 und 3 beziehen sich auf den Singulett-, bzw. Triplett-Spinzustand. Ein Vergleich von (43) mit (47) und (49) ergibt:

$$R_l(r) = C_l [j_l(kr) - \operatorname{tg} \delta_l n_l(kr)] \quad \text{für} \quad r > b. \quad (43')$$

1. Niederenergetische Streuung.

Werden Neutronen an Protonen gestreut, so ergibt sich für kleine Energien ($E \lesssim 10$ MeV) eine reine S-Wellenstreuung, das heißt, die gestreuten Neutronen, bzw. die Rückstoßprotonen sind im Schwerpunktsystem isotrop verteilt [31–35]. Zur Analyse der $N-N$ -Streuung wurden verschiedene Methoden entwickelt [7, 8, 36–40]. Bei reiner S-Wellenstreuung (nur $\delta_0 \neq 0$) wird

$$\sigma = (\pi/k^2) [\sin^2(^1\delta_0) + 3 \sin^2(^3\delta_0)]. \quad (55)$$

Mit

$$u_e(r) = (kr) R_e(r) \quad (56)$$

gilt nach (42):

$$u_0'' + k^2 u_0 - U(r) u_0 = 0. \quad (57)$$

Geben wir zwei Impulse k_1 und k_2 vor, so daß

$$u^{(1)''} + [k_1^2 - U(r)] \cdot u^{(1)} = 0, \quad (57')$$

$$u^{(2)''} + [k_2^2 - U(r)] u^{(2)} = 0. \quad (57'')$$

(Der Index 0 wurde unterdrückt.) Multiplizieren wir (57'), bzw. (57'') mit $u^{(2)}$, bzw. $u^{(1)}$, subtrahieren beide Gleichungen voneinander und integrieren von 0 bis R :

$$[u^{(2)} u^{(1)'} - u^{(1)} u^{(2)'}]_{r=0}^R = (k_2^2 - k_1^2) \int_0^R u^{(1)} u^{(2)} dr. \quad (58)$$

Als Vergleichsfunktion zu u verwenden wir die asymptotische Form von u : \bar{u} , welche wegen (47) und (56) lautet ($\delta_0 = \delta$):

$$\bar{u}(r) = \sin(kr + \delta) / \sin \delta. \quad (59)$$

(Wir haben hier im Gegensatz zu (40) die Normierung $\bar{u}(0) = 1$ gewählt.) Analog zu (58) genügt \bar{u} der Bedingung:

$$[\bar{u}^{(1)} \bar{u}^{(2)'} - \bar{u}^{(2)} \bar{u}^{(1)'}]_{r=0}^R = (k_2^2 - k_1^2) \int_0^R \bar{u}^{(1)} \bar{u}^{(2)} dr, \quad (60)$$

wie man unmittelbar aus (59) sieht. Da $\psi = R_0(r) = u(r)/(kr)$ für $r = 0$ endlich sein soll, so folgt als Randbedingung:

$$u(0) = 0. \quad (61)$$

Subtrahieren wir (58) von (60), dann wird mit (61) für $R \rightarrow \infty$:

$$[\bar{u}^{(1)} \bar{u}^{(2)'} - \bar{u}^{(2)} \bar{u}^{(1)'}]_{r=0}^\infty = (k_2^2 - k_1^2) \int_0^\infty [\bar{u}^{(1)} \bar{u}^{(2)} - \bar{u}^{(1)} \bar{u}^{(2)}] dr, \quad (62)$$

oder mit (59):

$$k_2 \operatorname{ctg} \delta^{(2)} - k_1 \operatorname{ctg} \delta^{(1)} = (k_2^2 - k_1^2) \int_0^\infty (\bar{u}^{(1)} \bar{u}^{(2)} - u^{(1)} u^{(2)}) dr. \quad (63)$$

Mit $k_1 = 0$ ($u^{(1)} = u^{(0)}$), $k_2 = k$ ($u^{(2)} = u$) schreibt sich (63):

$$k \operatorname{ctg} \delta = -1/a + \int_0^\infty (\bar{u}^{(0)} \bar{u} - u^{(0)} u) dr; \quad (64)$$

dabei haben wir

$$\lim_{k \rightarrow 0} (k \operatorname{ctg} \delta) = -1/a \quad (65)$$

gesetzt. Entwickeln wir das Integral in (64) nach k^2 :

$$\int_0^\infty (\bar{u}^{(0)} \bar{u} - u^{(0)} u) dr = \int_0^\infty (\bar{u}^{(0)2} - u^{(0)2}) dr + F(k^4 r_0^3), \quad (66)$$

so wird (64) mit

$$r_0 = 2 \int_0^\infty [\bar{u}^{(0)2} - u^{(0)2}] dr; \quad (67)$$

$$k \operatorname{ctg} \delta = -1/a + \frac{1}{2} r_0 k^2 + F(k^4 r_0^3). \quad (68)$$

(65) und (67) definieren die FERMISCHE Streulänge a [41] und die effektive Reichweite r_0 [42]. Der Formfaktor F hängt von der Potentialform ab und ist für niedere Energien zu vernachlässigen.

Aus der Streuung von Neutronen an Ortho- und Parawasserstoff [43—45]

$$\sigma_0 = (\pi/3) [3(3a)^2 + (3a + 3^1 a)^2], \quad \sigma_p = \pi(3^3 a + 1a)^2 \quad [4],$$

an Protonen bei verschwindender Energie (nach (47) und (60)):

$$\sigma_{np} = \pi [3(3a)^2 + (1a)^2], \quad (69)$$

sowie an Kristallen [49], erhält man für die Streulängen:

$$1a = (-23,68 \pm 0,06) \cdot 10^{-13} \text{ cm}, \quad 3a = (5,388 \pm 0,04) \cdot 10^{-13} \text{ cm}. \quad (70)$$

Die Triplettreichweite kann man aus der Deuteronbindungsenergie

$$\varepsilon = (-2,227 \pm 0,003) \text{ MeV} \quad [50—52] \quad (71)$$

berechnen: Setzt man in (62) $\bar{u}^{(2)} = e^{-\gamma r}$ (vgl. (88)),

$$\bar{u}^{(1)} = u^{(0)} (k_1 = 0),$$

dann wird $\bar{u}^{(2)'}(0) = -\gamma$ und

$$-1/a = \gamma - \frac{1}{2} \gamma^2 \cdot 3r_0 \quad [40]. \quad (72)$$

Dabei ist der Deuteronradius $1/\gamma$ gegeben durch

$$\gamma^2 = 2 M^* |\varepsilon|/\hbar^2, \quad (73)$$

Aus (70) bis (73) erhalten wir numerisch [53]:

$${}^3r_0 = (1,704 \pm 0,030) \cdot 10^{-13} \text{ cm.} \quad (74)$$

1r_0 muß aus der Energieabhängigkeit von σ_{np} [54, 55] gefunden werden. Da 1r_0 auch noch eine Funktion der Form des zugrunde gelegten Potentials ist, kann man 1r_0 nur in relativ weiten Grenzen bestimmen:

$${}^1r_0 = (2,7 \pm 0,5) \cdot 10^{-13} \text{ cm} \quad (75)$$

Aus dem Einfang langsamer Neutronen durch Protonen ergibt sich [56]: ${}^1r_0 = (2,6 \pm 0,6) \cdot 10^{-13} \text{ cm}$. Zwischen a und $\bar{u}^{(0)}$ besteht nach (59) und (65) der einfache Zusammenhang:

$$\bar{u}^{(0)}(r) = 1 - r/a. \quad (76)$$

2. Einfluß der Tensorkraft beim Deuteron.

Enthält das Potential zwischen zwei Nukleonen a und b einen Term $V_t(r) \cdot S_{12}$, wobei

$$S_{12} = (3/r^2) (\vec{\sigma}_a \cdot \mathbf{r}) (\vec{\sigma}_b \cdot \mathbf{r}) - (\vec{\sigma}_a \cdot \vec{\sigma}_b), \quad (77)$$

so ist (38) abzuändern in

$$-(\hbar^2/2 M^*) \Delta \psi + [V(r) + V_t \cdot S_{12}] \psi = E \psi. \quad (78)$$

ψ soll nun auch eine Eigenfunktion des Gesamtdrehimpulses $\mathfrak{J} = \mathfrak{S} + \mathfrak{Q}$ mit den Eigenwerten $j_3' = j' = 1$ sein. Die Eigenzustände des Spins bezeichnen wir analog zu (24):

$$s' = 1: s_3' = 1: |s_1^1\rangle = u_a^+ u_b^+ \text{ usw.} \quad (79)$$

Für die Bahndrehimpulseigenzustände schreiben wir

$$|l_{i_3}'\rangle = Y_{l' l_3'} = (-)^{l'} \sqrt{\frac{(2l' + 1)(l' - l_3')!}{4\pi(l' + l_3)!}} P_{l'}^{l'}(\cos \vartheta) e^{i l_3' \varphi}. \quad (80)$$

Die ersten $P_l^m(x)$ lauten: $P_0^0 = 1$, $P_1^0 = x$, $P_1^1 = (1 - x^2)^{1/2}$, $P_2^0 = 1/2(3x^2 - 1)$. (80) ist so normiert, daß

$$\int d\Omega \langle l_{i_3}' | l_{i_3}'' \rangle = \delta_{l' l''} \delta_{i_3' i_3''}. \quad (81)$$

(Der Faktor $(-)^{l'}$ in (80) entspricht der Wahl der positiven Quadratwurzel in (16 a)). Im Deuteron bildet der S -Zustand den Hauptanteil; da nun S_{12} jeweils nur gerade oder nur ungerade l' miteinander koppelt (vgl. (85)) und $l' > 2$ kein $j' = 1$ mehr liefern kann, so können wir uns für den Deuterongrundzustand auf S - und D -Zustände beschränken. Für $j_3' = j' = 1$, $s' = 1$ wird gemäß (35):

$$|j_1^1 s^1 l^0\rangle = |l_0^0 s_1^1\rangle, \quad (82 \text{ a})$$

$$|j_1^1 s^1 l^2\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}} (\sqrt{6} |l_2^2 s_{-1}^1\rangle - \sqrt{3} |l_1^2 s_0^1\rangle + |l_0^2 s_1^1\rangle) \quad (82 \text{ b})$$

($s' = 0$ können wir wegen $S_{12} |l_0^0 s_0^0\rangle = 0$ ausschließen.) Der Grundzustand des Deuterons ist daher durch

$$\psi = \psi_S + \psi_D \quad (83)$$

gegeben, wo

$$\psi_S = \langle u(r)/r | l_0^0 s_1^1 \rangle, \quad \psi_D = \langle w(r)/r | j_1^1 s^1 l^2 \rangle. \quad (84)$$

Verwendet man

$$S_{12} |l_0^0 s_1^1\rangle = \sqrt{8} |j_1^1 s^1 l^2\rangle \quad (85 \text{ a})$$

und

$$S_{12} |j_1^1 s^1 l^2\rangle = \sqrt{8} |l_0^0 s_1^1\rangle - 2 |j_1^1 s^1 l^2\rangle, \quad (85 \text{ b})$$

so sieht man, daß nur S - und D -Zustände miteinander gekoppelt werden. Mit (85 a) und (84) wird (83):

$$\psi = (1/r) [u(r) + (\sqrt{2}/4) w(r) S_{12}] |l_0^0 s_1^1\rangle. \quad (86)$$

Trägt man (86) in (78) ein und vergleicht die Koeffizienten der Drehimpulseigenzustände, dann erhalten wir mit (40) und (72) als Verallgemeinerung von (57):

$$u'' - \gamma^2 u - U u = \sqrt{8} U_t w, \quad (87)$$

$$w'' - \gamma^2 w - U w = \sqrt{8} U_t u + (6/r^2 - 2 U_t) w.$$

u und w haben die asymptotische Form ($U, U_t \rightarrow 0$):

$$\bar{u} = A \exp(-\gamma r), \quad \bar{w} = B \exp(-\gamma r) [3/(\gamma r)^2 + 3/(\gamma r) + 1]. \quad (88)$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß sich das Deuteron in einem S -, bzw. D -Zustand aufhält, ist gegeben durch

$$p_S = \int (\psi_S^*, \psi_S) dV = \int_0^\infty u(r)^2 dr, \quad p_D = \int (\psi_D^*, \psi_D) dV = \int_0^\infty w(r)^2 dr,$$

$$p_S + p_D = \int (\psi^*, \psi) dV = \int_0^\infty [u(r)^2 + w(r)^2] dr. \quad (89)$$

Dabei wurde (81) und (85) verwendet. Für das Quadrupolmoment ergibt sich [57]

$$q' = \int (\psi^* q \psi) dV / \int (\psi^* \psi) dV = (\sqrt{2}/10) \int_0^\infty r^2 \cdot$$

$$\cdot [u - (\sqrt{2}/4) w] w dr / (p_S + p_D), \quad (90)$$

mit

$$q = (r^2/2) P_2^0(\cos \vartheta). \quad (90')$$

3. Das Potential zwischen zwei Nukleonen.

Das Potential zwischen zwei Nukleonen wurde in zweiter und vierter störungstheoretischer Näherung von verschiedenen Autoren berechnet [58—65]. Hier soll die Methode von LEVY dargestellt werden, da sie die Berücksichtigung von nichtstatischen Korrekturen gestattet. LEVY hat die $PS(PS)$ Theorie nach der Methode der schwachen Kopplung entwickelt. Er verwandte dazu die nichtadiabatische Methode von TAMM [66] und DANCOFF [67], welche dazu erweitert wurde, auch virtuelle Nukleonenpaarerzeugung und den Austausch einer beliebigen Anzahl von Mesonen zu berücksichtigen [68].

Wir gehen von der Eigenwertgleichung

$$H|W\rangle = W|W\rangle \quad (91)$$

aus. Dabei ist W die Gesamtenergie des Systems,

$$H = H^0 + H', \quad (92)$$

wo H^0 die kräftefreie differentielle HAMILTON-Funktion ist und H' durch (12 a) gegeben ist:

$$H' = f c \bar{\psi} \gamma_5 \tau \cdot \Phi \psi. \quad (93)$$

Wir entwickeln $|W\rangle$ nach den Eigenzuständen des Vakuumenergieoperators H_0 ²:

$$|W\rangle = \sum_{m,n,v} a_v^{mn} |m, n, v\rangle, \quad H_0 |m, n, v\rangle = E_v^{mn} |m, n, v\rangle. \quad (94)$$

$|m, n, v\rangle$ bezeichnet jenen Zustand, in dem m freie Mesonen und n Nukleonenpaare vorhanden sind; v steht für Impulse und Spins. (94) in (91) eingesetzt gibt:

$$[W - E_v^{mn}] a_v^{mn} = \sum_{m',n',v'} \langle m, n, v | H' | m', n', v' \rangle a_v^{m'n'} \quad (95)$$

Dieses System gekoppelter Gleichungen ergibt durch wiederholte Substitution eine Gleichung für $a_v^{0,0}$ allein:

$$(W - 2 E_v^{0,0}) a_v^{0,0} = \sum_{m',n',v'} \Delta^{m',n'}(v, v') a_v^{0,0}, \quad (96)$$

oder im S. S.:

$$(W - 2 E_p) a^{0,0}(p, -p) = \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} K(p, p'; W) a^{0,0}(p', -p'). \quad (97)$$

Dabei ist $E_p = +c[(Mc)^2 + p^2]^{1/2}$. Multiplizieren wir (97) mit $(W + 2 E_p)/(W + 2 M c^2)$ und definieren $\varepsilon = W - 2 M c^2$ als die Bindungsenergie, dann wird aus (97):

$$\begin{aligned} & \left(\frac{p^2}{M c^2} - \varepsilon \right) \bar{a}(p) = \\ & = - \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \cdot \frac{(2 E_p + W)(2 E_{p'} + W)}{4 M c^2} K(p, p'; W) \bar{a}(p'), \end{aligned} \quad (98)$$

² Eine allgemeinere Formulierung wurde von DYSON [69] gegeben.

wobei $\varrho = 1 + (\varepsilon/4 M c^2)$ und $\bar{a}(\mathbf{p}) = c (4 M \varrho / (2 E_p + W))^{1/2} a^{0,0}(\mathbf{p}, -\mathbf{p})$ eingeführt wurde. Mit

$$\psi(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \bar{a}(\mathbf{p}) e^{(i/\hbar) \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} \quad (99)$$

und

$$Y(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; W) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^3} \frac{V(2E_p + W)(2E_{p'} + W)}{4 M \varrho c^2 \hbar^3} K(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; W) e^{\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - \mathbf{p}' \cdot \mathbf{r}')} \quad (100)$$

lautet (98) im Koordinatenraum:

$$[(\hbar^2/M \varrho) \Delta + \varepsilon] \psi = \int d\mathbf{r}' Y(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; W) \psi(\mathbf{r}'). \quad (101)$$

Für

$$Y(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; W) = \delta\left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{2}\right) V\left(\frac{\mathbf{r} + \mathbf{r}'}{2}, W\right) \quad (102)$$

stellt (101) eine SCHRÖDINGER-Gleichung mit dem Potential $V(\mathbf{r}, W)$ dar.

Um das Potential zweiter Näherung zu berechnen, beschränken wir uns auf $n = 0$, $m \leq 1$ und unterdrücken den Index 0 für n ; dann lautet (95):

$$(W - E_v^0) a_v^0 = \sum_{v'} \langle 0, v | H' | 0, v' \rangle a_{v'}^0 + \sum_{v'} \langle 0, v | H' | 1, v' \rangle a_{v'}^1, \\ (W - E_v^1) a_v^1 = \sum_{v'} \langle 1, v | H' | 0, v' \rangle a_{v'}^0 + \sum_{v'} \langle 1, v | H' | 1, v' \rangle a_{v'}^1,$$

Daraus folgt:

$$(W - E_v^0) a_v^0 = \sum_{v', v''} \frac{\langle 0, v | H' | 1, v' \rangle \langle 1, v' | H' | 0, v'' \rangle}{W - E_{v'}^1} a_{v''}^0.$$

Die Summe lautet ausführlich:

$$\sum_k \frac{\langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, s_1, s_2 | H' | \mathbf{p}_1', \mathbf{p}_2, s_1', s_2 \rangle \langle \mathbf{p}_1', \mathbf{p}_2, s_1', s_2 | H' | \mathbf{p}_1', \mathbf{p}_2', s_1', s_2' \rangle}{W - E(\mathbf{p}_1') - E(\mathbf{p}_2) - E_k^\pi} + \\ + \text{Term mit } \mathbf{p}_1 \leftrightarrow \mathbf{p}_2. \quad (103)$$

$\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$, bzw. $\mathbf{p}_1', \mathbf{p}_2'$ sind die Impulse, s_1, s_2 , bzw. s_1', s_2' die Spins der beiden Nukleonen im Anfangs-, bzw. Endzustand; \mathbf{k} ist der Impuls des ausgetauschten Mesons. Die Matrixelemente von H' bestimmen sich nach (93) mit Hilfe der Vakuumfeldgrößen (2) und (7). Dadurch wird (103):

$$- \frac{(f \hbar c)^2}{2 V} \sum_k.$$

$$\cdot \frac{(u_{\mathbf{p}_1'}^\dagger \beta \gamma_5 \tau_i u_{\mathbf{p}_1}) (u_{\mathbf{p}_2}^\dagger \beta \gamma_5 \tau_i u_{\mathbf{p}_2}) \exp(i/\hbar) \{(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1' - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}_1 + (\mathbf{p}_2 + \mathbf{k} - \mathbf{p}_2') \cdot \mathbf{x}_2\}}{[W - E(\mathbf{p}_1') - E(\mathbf{p}_2) - E_k^\pi] E_k^\pi} \\ + \text{Term mit } \mathbf{p}_1 \leftrightarrow \mathbf{p}_2.$$

Es muß $\exp(\dots) = 1$ sein, da sonst $\sum_k \dots$ verschwindet. Diese Forderung liefert uns die Impulserhaltung $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1' = \mathbf{p}_2' - \mathbf{p}_2 = \mathbf{t}$. Weiters folgt aus (8):

$$[(\vec{\alpha} \cdot \mathbf{p}) + M c \beta \mp E_p/c] u(\pm E_p) = 0. \quad (104)$$

Da für beide Nukleonen $E > 0$ gilt, folgt aus (104) mit $u(E_p) = \begin{pmatrix} u_p' \\ u_p'' \end{pmatrix}$

$$u_p' = \sqrt{\frac{E_p + M c^2}{2 E_p}} u, \quad (105)$$

wo u nur mehr spinabhängig ist:

$$u_p'' = \frac{(\vec{\sigma} \cdot \mathbf{p})}{E_p/c + M c} u_p', \quad u_p''^\dagger = u_p'^\dagger \frac{(\vec{\sigma} \cdot \mathbf{p}')}{E_{p'}/c + M c}. \quad (106)$$

Lassen wir das Normierungsvolumen V unendlich groß werden, so ist der Übergang $V^{-1} \sum_k \rightarrow \int d^3(\mathbf{k}/\hbar)$ durchzuführen. Somit erhalten

wir für das Schwerpunktsystem ($\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}$, $\mathbf{p}_1' = -\mathbf{p}_2' = \mathbf{p} - \mathbf{t}$) mit (97) und (103):

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3 \mathbf{p}'}{(2\pi)^3} K_2(\mathbf{p}, \mathbf{p}') &= -(\boldsymbol{\tau}^a \cdot \boldsymbol{\tau}^b) \frac{f^2 c^2}{\hbar} \cdot \\ &\cdot \int \frac{d^3 \mathbf{p}' [M c^2 + E(\mathbf{p})] [M c^2 + E(\mathbf{p}')] (\vec{\sigma}^a \cdot \mathbf{p}) (\vec{\sigma}^b \cdot \mathbf{p})}{(2\pi)^3 4 E(\mathbf{p}) E(\mathbf{p}') E^\pi(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) [E^\pi(\mathbf{p} - \mathbf{p}') + E(\mathbf{p}') + E(\mathbf{p}) - W]}, \end{aligned} \quad (107)$$

wo

$$\mathfrak{P} = \mathbf{p}'/[E(\mathbf{p}')/c + M c] - \mathbf{p}/[E(\mathbf{p})/c + M c]. \quad (108)$$

Aus (100) und (107) folgt:

$$\begin{aligned} Y_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; W) &= -(\boldsymbol{\tau}^a \cdot \boldsymbol{\tau}^b) \frac{f^2}{\hbar^3} \int \frac{d^3 \mathbf{p} d^3 \mathbf{p}'}{(2\pi)^6} \cdot \frac{\sqrt{(2 E_p + W)(2 E_{p'} + W)}}{4 M c} \cdot \\ &\cdot \frac{(\vec{\sigma}^a \cdot \mathfrak{P}) (\vec{\sigma}^b \cdot \mathfrak{P}) e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - \mathbf{p}' \cdot \mathbf{r}')}}{E^\pi(\mathbf{p} - \mathbf{p}') [E^\pi(\mathbf{p} - \mathbf{p}') + E_{p'} + E_p - W]}. \end{aligned} \quad (109)$$

In nichtrelativistischer Näherung

$$E_p = E_{p'} = M c^2, \quad \mathfrak{P} = -(\mathbf{t}/2 M c) \quad (110)$$

folgt mit (102):

$$I_2^{ab}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2} (\boldsymbol{\tau}^a \cdot \boldsymbol{\tau}^b) \frac{f^2 c^2}{\hbar^3 (2 m_0)^2} \int \frac{d^3 \mathbf{t}}{(2\pi)^3} \cdot \frac{(\vec{\sigma}^a \cdot \mathbf{t}) (\vec{\sigma}^b \cdot \mathbf{t})}{E^\pi(\mathbf{t}) [E^\pi(\mathbf{t}) - \varepsilon]} e^{i(\mathbf{t}/\hbar) \cdot \mathbf{r}}. \quad (111)$$

In erster Näherung ($\varepsilon = 0$) wird mit $E(\mathbf{k}) = c \sqrt{(m c)^2 + k^2}$:

$$V_2(\mathbf{r}) = (\boldsymbol{\tau}^a \cdot \boldsymbol{\tau}^b) \left(\frac{f^2}{4\pi} \right) \left(\frac{m}{2M} \right)^2 \left[\frac{1}{3} (\vec{\sigma}^a \cdot \vec{\sigma}^b) + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{\mu r} + \frac{1}{(\mu r)^2} \right) S_{12} \right] \frac{e^{-\mu r}}{r} + \frac{1}{3} (\vec{\sigma}^a \cdot \vec{\sigma}^b) (\boldsymbol{\tau}^a \boldsymbol{\tau}^b) (f/2\kappa_0)^2 \delta(\mathbf{r}). \quad (112)$$

Für PS (PV) bekommt man in der betrachteten Näherung das gleiche Potential wie für PS (PS) [63, 70–72], wenn man in (112)

$$g = (m/2M) f \quad (113)$$

setzt. Die Berücksichtigung der ε -Abhängigkeit von (111) liefert Korrekturen, die zu den führenden Termen im Verhältnis m/M stehen [73].

Die Beiträge höherer Ordnung in f erhält man nach dem gleichen Formalismus, wenn man $n, m \geq 1$ zuläßt. Zum Beispiel ergibt sich für jene Graphen, in denen höchstens zwei Mesonen und ein Nukleonpaar für einen bestimmten Zustand vorhanden sind (vgl. Abb. 1):



Abb. 1.

$$V_4^a(\mathbf{r}) = -6 (f^2/\hbar M)^2 \int \frac{d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^6} \cdot \frac{\exp \{ - (i/\hbar) (\mathbf{k} + \mathbf{k}') \mathbf{r} \}}{4 E^\pi(k) E^\pi(k') [E^\pi(k) + E^\pi(k')]},$$

wenn man das Potential in der Näherung (110) betrachtet. LEVY sind in seinen Berechnungen einige Fehler unterlaufen, bzw. hat er bestimmte Graphen unberechtigt vernachlässigt. KLEIN [73] hat nun das Problem neu durchgerechnet und findet für das adiabatische Potential vierter Ordnung unter Vernachlässigung von Termen, die von der Ordnung $(m/M)^2$ im Vergleich zu den führenden Termen sind:

$$V_4(\mathbf{r}) = -3 m c^2 \left(\frac{f^2}{4\pi \hbar c} \cdot \frac{m}{2M} \right)^2 \left[(2/\pi) K_1(2\mu r) - \right. \\ \left. - (m/M) \left(1 + \frac{1}{\mu r^2} \right)^2 \cdot e^{-2\mu r} \right] / (\mu r)^2, * \quad (114)$$

Ferner:

$$V_6(\mathbf{r}) = \frac{4 m c^2}{3} \left(\frac{f^2}{4\pi \hbar c} \right)^3 \left(\frac{m}{2M} \right)^4 (\boldsymbol{\tau}^a \cdot \boldsymbol{\tau}^b) \{ (\vec{\sigma}^a \cdot \vec{\sigma}^b) + S_{12} \} \frac{e^{-3\mu r}}{(\mu r)^3} \left(1 + \frac{1}{\mu r} \right)^2, \quad (115)$$

$$V_8(\mathbf{r}) = -3 \left(\frac{f^2}{2\hbar M} \right)^4 \int \frac{d^3\mathbf{k}_1 \dots d^3\mathbf{k}_4}{(2\pi)^{12}} \frac{\exp [i (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) \mathbf{r}]}{E_1^\pi E_2^\pi E_3^\pi E_4^\pi (E_1^\pi + E_2^\pi)} \cdot \left[\frac{3}{(E_1^\pi + E_3^\pi) (E_2^\pi + E_4^\pi)} + \frac{2}{(E_2^\pi + E_3^\pi) (E_1^\pi + E_4^\pi)} \right]. \quad (116)$$

* Das von KLEIN berechnete Potential (114) ist viel schwächer als das von LEVY. Doch läßt sich zeigen, daß bei Berücksichtigung der Nukleonentrückstöße der abstoßende Term viel kleiner wird.

($K_1(x)$... HANKEL-Funktion mit imaginärem Argument.) Wir sehen also, daß V_2 und V_4 für $r \kappa_0 > 1$ die Hauptbeiträge zum Potential liefern, während die höheren Näherungen nur kleinere Korrekturen darstellen. Die Konvergenz der höheren adiabatischen Näherungen wurde von LEVY [65] und KLEIN [74] abgeschätzt:

$$V_{4n}(r) = -\frac{3}{2} \frac{m c^2}{\pi} \left(\frac{f^2}{4 \pi \hbar c M} \cdot \frac{m}{(\mu r)^{2n}} \right)^{2n} \cdot \frac{K_1(2n\mu r)}{(\mu r)^{2n}}.$$

Die Näherung (110) bedeutet, daß die Rückstöße in den virtuellen Zwischenzuständen vernachlässigt werden. Diese wurden von NAKABAYASI und SATO [64] mit Hilfe der S-Matrix-Theorie berücksichtigt. Sie erhalten bei Vernachlässigung von Ausdrücken der Ordnung $(v/c)^2$ im Vergleich zu den führenden Termen für das Potential vierter Ordnung in f :

$$V_4 = -\frac{m c^2}{\pi} \left[[3 J_I + 2 (\boldsymbol{\tau}^a \cdot \boldsymbol{\tau}^b) J_{II}] \right]. \quad (117)$$

Dabei gilt für $P S (P S)$ und für $P S (P V)$:

$$J_I^{PS} = \left(\frac{f^2}{4 \pi \hbar c} \cdot \frac{m}{2 M} \right)^2 (j_1 - j_2 - 2 j_3 + 4 j_5), \quad (118 a)$$

$$J_{II}^{PS} = \left(\frac{f^2}{4 \pi \hbar c} \cdot \frac{m}{2 M} \right)^2 (-j_1 + j_2 - 2 j_3 + 4 j_5),$$

$$J_I^{PV} = \left(\frac{g^2}{4 \pi \hbar c} \cdot \frac{2 M}{m} \right)^2 (3 j_1 - j_2 - 10 j_3 + 4 j_5), \quad (118 b)$$

$$J_{II}^{PV} = \left(\frac{g^2}{4 \pi \hbar c} \cdot \frac{2 M}{m} \right)^2 (-j_1 + j_2 - 2 j_3 + 2 j_4 + 4 j_5).$$

mit

$$j_1 = K_1(2\mu r) (\mu r)^{-2},$$

$$j_2 = \left(\frac{M}{m} \right)^2 \frac{1}{\mu r} \int_0^1 du u^{-4} \left[2 \left(\frac{m}{M} \right)^2 \varphi^2 + (1 - u^2)^2 \frac{1 + 4u^2 + u^4}{(1 + u^2)^2} \right] K_0(2\mu r \varphi),$$

$$j_3 = \left(\frac{M}{m} \right)^2 \frac{1}{\mu r} \int_0^1 du u^{-1} (1 - u) K_0(2\mu r \varphi),$$

$$j_4 = (\mu r)^{-2} \int_0^1 du \varphi K_1(2\mu r \varphi) - 2 \left(\frac{M}{m} \right)^2 \frac{1}{\mu r} \int_0^1 \frac{du}{n} (1 - u^2) K_0(2\mu r \varphi),$$

$$j_5 = \left(\frac{M}{m} \right)^4 \int_0^1 \frac{du}{u^3} (1 - u)^3 \varphi^{-1} K_1(2\mu r),$$

wo

$$\varphi = (1/u) [(M/m)^2 (1 - u)^2 + u]^{1/2}.$$

j_2 ist ein Rückstoßeffekt ($\sim (\mu r)^{-6}$), ist immer positiv, wirkt also für kleine Radien wie eine starre Kugel („rigid core“). In adiabatischer Näherung ($M \gg m$) wird $j_2, j_4 \rightarrow 0$; $j_3, j_5 \rightarrow (2/\pi) K_1 (2\mu r)/(\mu r)^2$ und damit geht (117) für $PS(PS)$ über in

$$\begin{aligned} V_4^{ad.} &\approx -\frac{6mc^2}{\pi} \left(\frac{f^2}{4\pi\hbar c} \cdot \frac{m}{2M} \right)^2 \frac{K_1(2\mu r)}{(\mu r)^2} \approx \\ &\approx -\frac{3mc^2}{\pi} \left(\frac{f^2}{4\pi\hbar c} \cdot \frac{m}{2M} \right)^2 \frac{e^{-2\mu r}}{(\mu r)^{5/2}} \end{aligned} \quad (117')$$

in Übereinstimmung mit dem ersten Term von (114). (Dabei wurde $K_1(x) \rightarrow (\pi/2x)^{1/2} e^{-x}$ für $x \gg 1$ verwendet.)

Während LEVY nur durch qualitative Überlegungen zeigt, daß dem Berührungsterm der adiabatischen Näherung (112) eine Abstoßung für $r \leq r_c$ entspricht, erhalten wir diese automatisch aus (117). Dabei soll r_c in der Größenordnung von $0,6 \cdot 10^{-13}$ cm liegen. Für Entfernungen dieser Größenordnung sind allerdings die quantitativen Verhältnisse schwer zu überblicken (Rückstoßeffekte und Beiträge höherer Ordnung). Nehmen wir eine vollständige Abstoßung für $r < r_c$ an, dann können wir r_c und f^2 aus 1a und ε bestimmen. 1. Singulettzustand: Ist $V = +\infty$ für $r \leq r_c$, dann geht die Randbedingung (61) über in

$$u(r_c) = 0, \quad (119)$$

(vgl. (124)), während für $r > r_c$ (57) gilt:

$$u'' - U(r)u = 0. \quad (120)$$

(Für den Singulettzustand kann man $k^2 = -\gamma^2 = 0$ setzen.) Beginnt man für große r mit der asymptotischen Form (76): $u(r \gg \mu^{-1}) = \bar{u}(r) = 1 - r/{}^1a$, dann liefert die numerische Integration von (120) mit $U(r) = (2M^*/\hbar^2)(V_2 + V_4)$, bzw. ∞ für $r >$, bzw. $< r_c$ eine Nullstelle von u : $r_c = \varphi_1(f^2/4\pi\hbar c)$. 2. Triplettzustand: Der Grundzustand des Deuterons wird durch (86) beschrieben, wobei u und w den Gleichungen (87) genügen. Beginnen wir die numerische Integration mit den asymptotischen Formen (88):

$$\bar{u} = e^{-\gamma r}, \quad \bar{w} = \varrho e^{-\gamma r} [1 + 3/(\gamma r) + 3/(\gamma r)^2], \quad (122)$$

so erhalten wir eine zweite Funktion $r_c = \varphi_2(f^2/4\pi\hbar c)$. Aus $\varphi_1 = \varphi_2$ findet LEVY $r_c = 0,54 \cdot 10^{-13}$ cm, $f^2/(4\pi\hbar c) = 9,7 \pm 1,3$. Für gleiches r_c finden MARTIN und VERLET [75] aus der pp -Streuung bei 18,3 MeV: $f^2/(4\pi\hbar c) = 10,36 \pm 0,02$. Mit diesen aus 1a und ε gewonnenen Werten folgt aus den LEVYSchen Potentialen mit (67) und (76): ${}^1r_0 = 2,5 \cdot 10^{-13}$ cm; mit (67) und (122):

$${}^3r_0 = 2 \int_0^\infty [e^{-2\gamma r} - (u^2 + w^2)/(1 + \varrho^2)] dr = 1,664 \cdot 10^{-13} \text{ cm},$$

schließlich folgt aus (89) und (90):

$$p_D/(p_S + p_D) = 0,051 \quad \text{und} \quad q' = 2,08 \text{ mb} \quad (1 \text{ mb} = 10^{-27} \text{ cm}^2).$$

$$\mu_d = \mu_n + \mu_p - \frac{3}{2} \left(\mu_n + \mu_p - \frac{1}{2} \right) p_D/(p_S + p_D)$$

führt zu

$$p_D/(p_S + p_D) = 0,04 \pm 0,02. \quad (123)$$

Die Werte für 1r_0 , 3r_0 und $p_D/(p_S + p_D)$ stehen in guter Übereinstimmung mit den experimentellen Werten (75), (74) und (123). (Eine Übereinstimmung mit dem Experiment ist insofern verständlich, als JASTROW [76] gezeigt hat, daß die Deuterondaten relativ unempfindlich gegen Veränderungen von V_4 sind.) Hingegen ergibt sich das elektrische Quadrupolmoment im Vergleich zum experimentellen Wert [77—80]

$$q' = (2,738 \pm 0,016) \text{ mb}$$

als zu klein.

4. Proton-Neutron-Streuung bei mittleren und hohen Energien.

Die $p-n$ -Streuung weist bei mittleren und hohen Energien eine weitgehende Symmetrie um 90° im Schwerpunktsystem auf [81—98]. So ergibt die Analyse der Experimente von HADLEY und Mitarbeitern [99]:

$$40 \text{ MeV: } 4\pi\sigma(\vartheta) = \text{const.} [1 + 0,26 P_2(\vartheta) + 0,02 P_4(\vartheta)],$$

$$90 \text{ MeV: } 4\pi\sigma(\vartheta) = \text{const.} [1 - 0,14 P_1(\vartheta) + 0,68 P_2(\vartheta) + 0,02 P_3(\vartheta) + 0,11 P_4(\vartheta)].$$

Unter Ausschluß von Spinkräften folgt daraus für 90 MeV:

$$\delta_0 = 53^\circ \pm 5^\circ, \quad \delta_1 = -1^\circ \pm 1^\circ, \quad \delta_2 = 5^\circ \pm 1^\circ.$$

Die theoretische Behandlung des Streuproblems hat LEVY unter Verwendung seines Potentials numerisch, bzw. mit Hilfe der BORNSchen Näherung durchgeführt. Die Phasendifferenzen δ_l ergeben sich bei einem Potential der Form (121) nach der BORNSchen Näherung auf folgende Weise: Aus Gleichung (42) für R_l folgt $R_l(r) = 0$ für $r < r_c$, die Stetigkeit von R_l verlangt

$$R_l(r_c) = 0. \quad (124)$$

Für R_l machen wir den Ansatz:

$$R_l(r) = [\cos a_l j_l(kr) - \sin a_l n_l(kr)] [1 + v_l(r)], \quad (125)$$

$$|v_l(r)| \ll 1, \quad (125')$$

woraus nach (49) die asymptotische Form

$$\bar{R}_l(r) = (kr)^{-1} \sin \left[(kr) - \frac{\pi}{2} (l+1) + \delta_l \right] \quad (126)$$

folgt. (124) und (125) geben

$$\text{tg } a_l = j_l(kr_c)/n_l(kr_c). \quad (127)$$

(125) in (42) eingesetzt gibt:

$$\begin{aligned} r^{-2} \{ r^2 [\cos \alpha_l j_l(kr) - \sin \alpha_l n_l(kr)]^2 v_l'(r) \}' = \\ = [\cos \alpha_l j_l(kr) - \sin \alpha_l n_l(kr)]^2 U(r). \end{aligned}$$

Dies von r_c bis r integriert liefert uns einen Ausdruck für v_l' . Bilden wir $v_l'(kr \gg 1) = \bar{v}_l$ und integrieren nochmals, dann erhalten wir:

$$\begin{aligned} \bar{v}_l = \text{tg} \left[kr - \frac{1}{2}(l+1)\pi + \alpha_l \right] \int_{r_c}^{\infty} kr^2 [\cos \alpha_l j_l(kr) - \\ - \sin \alpha_l n_l(kr)]^2 U(r) dr + C'. \end{aligned} \quad (128)$$

(128) in (125) eingesetzt gibt bei Beachtung von (125') durch einen Vergleich mit (126):

$$\text{tg } \delta_l = - \int_a^{\infty} kr^2 [\cos \alpha_l j_l(kr) - \sin \alpha_l n_l(kr)]^2 U(r) dr + \text{tg } \alpha_l \quad (129)$$

wo $\text{tg } \alpha_l$ durch (127) gegeben ist.

Für 40 MeV Neutronen bekommt LEVY einen totalen p - n -Streuquerschnitt von (216 ± 20) mb in Übereinstimmung mit dem experimentellen Wert von (202 ± 7) mb. Allerdings ist die theoretische Winkelverteilung zu schwach. Die Symmetrie des Streuquerschnittes um 90° Schwerpunktsystem wird bis zu den höchsten bisher gemessenen Energien nur wenig gestört. Zur Deutung dieser Symmetrie hat SERBER

ein p - n -Potential der Form $V = V(r) \frac{1 + P_x}{2}$ vorgeschlagen, wo P_x

den Ortsaustauschoperator bedeutet. Daraus folgt $V = V(r)$, bzw. 0 für l' gerade, bzw. ungerade, so daß $\delta_1, \delta_3, \dots$ verschwinden. Die 90 MeV Experimente sprechen für $V = V(r) (1 - a + a P_x)$ mit $a = 0,55 \pm 0,05$. Wir erhalten aus dem theoretischen Potential $V = V_2 + V_4$ ebenfalls eine Reduktion des Potentials in ungeraden

l' -Zuständen: Mit $P_\sigma P_\tau = -P_x$ (PAULI-Prinzip!), wo $(\vec{\sigma}^a \cdot \vec{\sigma}^b) = 2 P_\sigma - 1$, $(\vec{\tau}^a \cdot \vec{\tau}^b) = 2 P_\tau - 1$, folgt aus (112) und (117'):

$$V = -m c^2 \frac{f^2}{4 \pi \hbar c} \left(\frac{m}{2M} \right)^2 \left[\frac{3}{\pi} \frac{f^2}{4 \pi \hbar c} \cdot \frac{e^{-\mu r}}{(\mu r)^{3/2}} + C' \right] \frac{e^{-\mu r}}{(\mu r)}. \quad (130)$$

$$V = -8,2 \text{ MeV} \left[9,9 \frac{e^{-\mu r}}{(\mu r)^{3/2}} + C' \right] \frac{e^{-\mu r}}{(\mu r)}. \quad (130')$$

Ist $P_x = -1$, so gilt $C' = -1/3$, bzw. -3 für $|s^1\rangle$, bzw. $|s^0\rangle$; ist $P_x = 1$, so gilt $C' = 1$. Für ${}^1P = |s^1 l^1\rangle$ beispielsweise verschwindet V für $r = 1,08 \mu^{-1} = 1,51 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$.

III. Proton-Proton-Streuung.

1. Niederenergetische Streuung [36, 100—104].

Bei der Streuung von Protonen an Protonen ist neben dem Kernpotential $V(r)$ noch die COULOMB-Wechselwirkung ε^2/r zu berücksichtigen, so daß (38) mit (40) die Form annimmt:

$$\Delta \psi + [k^2 - U(r) - \alpha/\beta] (k/r) \psi = 0, \quad (131)$$

wo $\alpha = \varepsilon^2/(4\pi\hbar c)$, $\beta = v/c$. Für $U(r) \equiv 0$ (A) wird aus (131):

$$\Delta \varphi + [k^2 - (\alpha/\beta) (k/r)] \varphi = 0. \quad (132)$$

Der Ansatz

$$\varphi = \sum_{l=0}^{\infty} c_l [v_l(r)/(k r)] P_l(\cos \vartheta) \quad (133)$$

führt auf

$$v_l(r)'' + [k^2 - (2\alpha k/\beta r) - l(l+1)/r^2] v_l(r) = 0 \quad (134)$$

mit der Lösung [105]

$$v_l(r) = e^{-\frac{\pi}{2} \frac{\alpha}{\beta}} \frac{|\Gamma(i\alpha/\beta + l + 1)|}{2(2l+1)!} e^{ikr} (2kr)^{l+1} F\left(\frac{i\alpha}{\beta} + l + 1, 2l + 2, -2ikr\right). \quad (135)$$

Die Konstanten c_l ergeben sich bei geeigneter Normierung von φ zu [106]

$$c_l = i^l (2l+1) e^{i\eta_l}, \quad \text{wo} \quad \eta_l = \arg \Gamma\left(\frac{i\alpha}{\beta} + l + 1\right), \quad (136)$$

so daß (133) lautet:

$$\varphi = (1/kr) \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) e^{i\eta_l} v_l(kr) P_l(\cos \vartheta). \quad (137)$$

v_l und φ haben die asymptotischen Lösungen:

$$\bar{v}_l = v_l(kr \gg 1) = \sin[kr - (\alpha/\beta) \ln(2kr) - 1/2 l\pi + \eta_l], \quad (138)$$

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} = \varphi(kr \gg 1) = & \exp i \left[kr + (\alpha/\beta) \ln \left(2kr \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right) \right] + \\ & + [f(\vartheta)/r] \exp i [kr - (\alpha/\beta) \ln(2kr) + 2\eta_0]. \end{aligned} \quad (139)$$

Der Winkelfaktor der gestreuten Kugelwelle lautet:

$$f_A(\vartheta) = - \left[\alpha / \left(2\beta kr \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right) \right] \cdot \exp \left[-i(\alpha/\beta) \ln \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right]. \quad (140)$$

Wegen $P_x = -P_o$ und $P_x f(\vartheta) = f(\pi - \vartheta)$ wird $1f = f_A(\vartheta) + f_A(\pi - \vartheta)$, $3f = f_A(\vartheta) - f_A(\pi - \vartheta)$. Dies in (52) eingesetzt gibt die MOTT-Formel: $d\sigma/d\Omega = (\varepsilon^2/E)^2 \cos \theta \{ \sin^{-4} \theta + \cos^{-4} \theta - (\sin \theta \cos \theta)^{-2} \cos(\alpha/\beta) \ln \tan^2 \theta \}$, wo $\theta = 1/2 \vartheta$ und $E = M v^2/2$.

Ist $U(r) \neq 0$, aber von endlicher Reichweite r_0 , so führt der Ansatz

$$\psi = (1/k r) \sum i^l (2l+1) e^{i\eta_l} u_l(r) P_l(\cos \vartheta) \quad (141)$$

in (131) eingesetzt auf

$$u_l''(r) + [k^2 - (2\alpha k/\beta r) - U(r) - l(l+1)/r^2] u_l(r) = 0, \quad (142)$$

mit der asymptotischen Lösung $\bar{u}_l = u_l(r > r_0)$:

$$\bar{u}(kr \gg 1) = C_l \sin[kr - (\alpha/\beta) \ln(2kr) - 1/2 l\pi + \eta_l + \delta_l]. \quad (143)$$

Wir wählen

$$C_l = e^{i\vartheta_l}, \quad (144)$$

damit die einlaufende Welle des Problems (A) unverändert bleibt. Für

$\psi(kr \gg 1) = \bar{\psi}$ folgt mit (137) und (141):

$$\bar{\psi} = \bar{\varphi} + (1/k r) \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) e^{i\eta_l} [\bar{u}_l - \bar{v}_l] P_l(\cos \vartheta).$$

Daraus folgt mit (139), (143) und (138), wenn wir auch $\bar{\psi}$ in der Form (139) schreiben:

$$f(\vartheta) - f_A = (1/2ik) \sum_l (2l+1) e^{2i(\eta_l - \eta_0)} (e^{2i\delta_l} - 1) P_l(\cos \vartheta). \quad (145)$$

Der Zusammenhang zwischen u_0 , \bar{u}_0 , α und r_0 läßt sich ebenso wie bei der p - n -Streuung herleiten: Normieren wir wieder

$$\bar{u}_0(0) = 1 \quad (146)$$

an Stelle von (144), dann ist nach (62) und (146):

$$\bar{u}^{(2)'}(0) - \bar{u}^{(1)'}(0) = (k_2^2 - k_1^2) \int_0^{\infty} [\bar{u}^{(1)} \bar{u}^{(2)} - u^{(1)} u^{(2)}] dr. \quad (147)$$

Für die Lösung $\bar{u}(kr)$ von (134) mit dem asymptotischen Verhalten (143) und der Anfangsbedingung (146) folgt

$$\begin{aligned} \bar{u}'(0) &= \frac{2\pi k \alpha}{(e^{2\pi\alpha/\beta} - 1)} \operatorname{ctg} \delta_0 + \frac{2k\alpha}{\beta} \left[1 - \ln \frac{\alpha}{\beta} - \right. \\ &\quad \left. - \psi(1) - \zeta(2) - \operatorname{Re} \psi \left(1 + i \frac{\alpha}{\beta} \right) \right]. \end{aligned} \quad (148)$$

Setzen wir wieder $k_1 = 0$, $k_2 = k$, dividieren (147) durch $k\alpha/\beta$ und setzen (148) ein, dann wird:

$$\frac{2\pi \operatorname{ctg} \delta_0}{e^{2\pi\alpha/\beta} - 1} = 2 \ln \frac{\alpha}{\beta} - 2 \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n [n^2 + (\alpha/\beta)^2]} + \frac{\beta}{\alpha k} \left(-\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2} r_0 k^2 \right). \quad (149)$$

Dabei wurde die GAUSSsche Funktion

$$\psi(x+1) = -C + \sum_{n=1}^{\infty} x/[n(x+n)],$$

Gleichung (66) und

$$\lim_{k \rightarrow 0} [\pi \operatorname{ctg} \delta_0 / (e^{2\pi\alpha/\beta} - 1)] = -1/a \quad (150)$$

verwendet. Da bei der p p -Streuung für $l' = 0$ nur $s' = 0$ in Frage kommt ($P_x = -P_\sigma$), so läßt sich a und r_0 aus den Streuexperimenten [107—120] bestimmen [53, 56, 121]:

$$^1a = -(7,67 \pm 0,05) \cdot 10^{-13} \text{ cm}, \quad ^1r_0 = (2,65 \pm 0,07) \cdot 10^{-13} \text{ cm}. \quad (151)$$

2. Streuung bei mittleren und hohen Energien.

Die Streuquerschnitte für mittlere und hohe Energien wurden von verschiedenen Autoren gemessen [12—18, 122—132]. Die Streuung ist noch bei 30 MeV mit einer reinen S-Wellenstreuung verträglich ($\delta_0 \approx 50^\circ$) [13]. MARTIN und VERLET [75] haben δ_0 , δ_1 und δ_2 nach den LEVYSchen Potentialen berechnet. Sie erhalten für 18,3 MeV: $\delta_0 = 52,8^\circ$; $\delta_1^0 = 6,82^\circ$; $\delta_1^1 = -1,45^\circ$; $\delta_2^1 = 1,85^\circ$, $\delta_2 = 0,35^\circ$ (der obere Index bezieht sich auf j'). Die Befriedigung der experimentellen Daten führt für $\mu r_c = 0,38$ auf $j^2 = (10,36 \pm 0,02) 4\pi \hbar c$. Für 32 MeV erhalten sie $\delta_0 = 44,85^\circ$; $\delta_1^0 = 11,79^\circ$; $\delta_1^1 = -1,62^\circ$; $\delta_2^1 = 3,79^\circ$; $\delta_2 = 0,97^\circ$, wogegen das Experiment für eine reine S-Wellenstreuung spricht. Wie weit diese Schwierigkeit durch Potentialkorrekturen bereinigt wird, bleibt zu untersuchen. Für hohe Energien ($E > 100$ MeV) können wir für Winkel, welche nicht nahe bei 0° oder 180° liegen, die COULOMB-Kraft vernachlässigen. Wir können daher (51) verwenden:

$$\begin{aligned} d\sigma_{pp}(\vartheta)/d\Omega &= (1/4) |^1f(\vartheta) + ^1f(\pi - \vartheta)|^2 + (3/4) |^3f(\vartheta) + ^3f(\pi - \vartheta)|^2 = \\ &= (1/k^2) \sum_{l, l' \text{ gerade}} (2l+1)(2l'+1) \sin ^1\delta_l \sin ^1\delta_{l'} \cos ^1\delta_{ll'} P_l P_{l'} + \\ &+ \sum_{l, l' \text{ ungerade}} (2l+1)(2l'+1) \sin ^3\delta_l \sin ^3\delta_{l'} \cos ^3\delta_{ll'} P_l P_{l'}. \quad (152) \end{aligned}$$

$\delta_{ll'} = \delta_l - \delta_{l'}$. Für hohe Energien (120 bis 435 MeV) wird der differentielle Wirkungsquerschnitt im Schwerpunktsystem ungefähr isotrop und beträgt unabhängig von der Energie $d\sigma/d\Omega \approx 4$ mb. Für eine monotone Zentralkraft würden die Phasendifferenzen alle gleiches Vorzeichen besitzen, (152) würde daher nur eine Vorwärtsstreuung geben. Um die Vorwärtsstreuung zu stören, haben CHRISTIAN und NOYES [133] ein starkes Tensorpotential, CASE und PAIS [136] eine starke Spin-Bahn-Kopplung eingeführt. Das feldtheoretisch berechnete Potential legt die Annahme eines stark abstoßenden Potentials für $r < r_c$ nahe, mit dem JASTROW [135] die Isotropie des hochenergetischen p p -Streuquerschnittes deutete. Die Abstoßung für kleine Radien hat zur Folge, daß für Energien größer als zirka 100 MeV δ_0 negativ wird, während δ_1 und δ_2 noch positiv sind. Dadurch ist eine Reduktion des Streuquerschnittes für kleine Streuwinkel möglich.

IV. Pion-Nukleon-Streuung.

Der Wirkungsquerschnitt für die Streuung geladener Pionen an Protonen wurde bei verschiedenen Pionenergien gemessen [136—149]. Es sind folgende Prozesse möglich:

- I $\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p$,
- II $\pi^- + p \rightarrow \pi^- + p$,
- III $\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n$,
- IV $\pi^- + p \rightarrow \gamma + n$.

Die Theorie der schwachen Kopplung [150—154]: Die $PS(PS)$ Theorie gibt nicht das starke Ansteigen des Streuquerschnittes mit der Energie (vgl. Abb. 2) richtig wieder. Die $PS(PV)$ Theorie ist für große Energien quantitativ unbefriedigend.

Bei Annahme unendlich schwerer Nukleonen wird mit (2), (7) und (9) aus (12 b):

$$H' = \int d^3r H'(\mathbf{r}) = (g c / \mu) V (u^\dagger \beta \gamma_5 \vec{\gamma} i \vec{\tau} \tau_i u) \frac{\hbar}{\sqrt{2 V E_k^\pi}} e^{\frac{i}{\hbar} \vec{\tau} \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}} (a_{i,k} + a_{i,-k}^*). \quad (154)$$

Daraus folgt für die Streumatrix zweiter Ordnung:

$$H_{ea}'' = \sum_z H'_{ez} H'_{za} / E_k^\pi = (g c / \mu)^2 (\hbar^2 k^2 / 2 V E_k^{\pi 2}).$$

Die Streuwahrscheinlichkeit w ist durch $w = \frac{2\pi}{\hbar} = |H''|^2 \frac{V k^2}{2\pi^2 \hbar^3 v}$, wo $v = k c^2 / E_k^\pi$ die Mesongeschwindigkeit bedeutet. Damit wird

$$\sigma_I = \sigma_{II} = V w / v = (4\pi / \mu^2) (g^2 / 4\pi \hbar c)^2 (\hbar^2 / m E_k^\pi)^2, \quad (155)$$

beziehungsweise

$$d\sigma_I / d\Omega = d\sigma_{II} / d\Omega = \mu^{-2} (g^2 / 4\pi \hbar c)^2 (\hbar^2 / m E_k^\pi)^2. \quad (156 a)$$

Für σ_{III} und σ_{IV} findet man:

$$(d\sigma_{III} / d\Omega) = 2 \cos^2 \vartheta (d\sigma_I / d\Omega),$$

$$(d\sigma_{IV} / d\Omega) = \frac{2a}{\mu^2} \cdot \frac{g^2}{4\pi \hbar c} \cdot \frac{\hbar \omega}{k c} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left[\frac{m k c^3 \sin \vartheta}{E_k^\pi (E_k^\pi - k c \cos \vartheta)} \right]^2 \right\}. \quad (156 b)$$

Nimmt man

$$g^2 = 0,44 \cdot 4\pi \hbar c \quad (157)$$

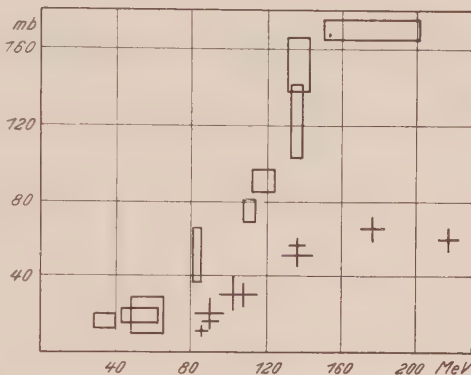


Abb. 2. Pion-Proton-Streuung: σ_I (□) und $\sigma_{II} + \sigma_{III} + \sigma_{IV}$ (+) in Abhängigkeit von der kinetischen Energie der Pionen.

an, dann wird

$$\sigma_I = \sigma_{II} = 47 \text{ mb } \beta^4 / (1 - \beta^2), \quad (155')$$

wo $\beta c = v$. Die experimentellen Werte von σ_I werden dadurch bis 100 MeV befriedigt, jedoch ist (157) viel größer als der aus den Deuteron-daten zu erwartende Wert. Außerdem ist $(\sigma_{II} + \sigma_{III})/\sigma_I = 5/3$ im Widerspruch zum Experiment, das einen Wert von 0,5 gibt. Das ausgeprägte Maximum von σ_I und σ_{II} , bzw. σ_{III} bei einer kinetischen Energie der Pionen von zirka 200 MeV (vgl. Abb. 2) spricht dafür, daß es sich hier um einen Resonanzeffekt handelt, der durch die Bildung von isobaren Nukleonzuständen mit Spin- und isotopen Spinwerten $> 1/2$ ermöglicht wird [155, 156]:

Bezeichnen wir das Matricelement für den Übergang aus dem Zustand $|i_{\frac{3}{2}}^{i'}\rangle$ in den Zustand $|i_{\frac{3}{2}}^{i''}\rangle$ mit $\langle i_{\frac{3}{2}}^{i''} | i_{\frac{3}{2}}^{i'} \rangle$, dann wird mit (37):

$$\begin{aligned} \langle p\pi^+ | p\pi^+ \rangle &= \langle i_{\frac{3}{2}}^{3/2} | i_{\frac{3}{2}}^{3/2} \rangle, \\ \langle p\pi^- | p\pi^- \rangle &= \frac{1}{3} \{ \langle i_{\frac{1}{2}}^{3/2} | i_{\frac{1}{2}}^{3/2} \rangle + 2 \langle i_{\frac{1}{2}}^{1/2} | i_{\frac{1}{2}}^{1/2} \rangle \}, \\ \langle n\pi^0 | p\pi^- \rangle &= \frac{\sqrt{2}}{3} \{ \langle i_{\frac{1}{2}}^{3/2} | i_{\frac{1}{2}}^{3/2} \rangle - \langle i_{\frac{1}{2}}^{1/2} | i_{\frac{1}{2}}^{1/2} \rangle \}. \end{aligned} \quad (158)$$

Daraus folgt:

$$\left. \begin{aligned} d\sigma_I &= d\sigma_{\frac{3}{2}}, & d\sigma_{II} &= (1/9) [d\sigma_{\frac{3}{2}} + 4 d\sigma_{\frac{1}{2}} + 4 \sqrt{d\sigma_{\frac{3}{2}} d\sigma_{\frac{1}{2}}} \cos \chi], \\ d\sigma_{III} &= (2/9) [d\sigma_{\frac{3}{2}} + d\sigma_{\frac{1}{2}} - 2 \sqrt{d\sigma_{\frac{3}{2}} d\sigma_{\frac{1}{2}}} \cos \chi], \end{aligned} \right\} \quad (159)$$

wo $d\sigma_{\frac{3}{2}} = |\langle i_{\frac{3}{2}}^{3/2} | i_{\frac{3}{2}}^{3/2} \rangle|^2$, $d\sigma_{\frac{1}{2}} = |\langle i_{\frac{1}{2}}^{1/2} | i_{\frac{1}{2}}^{1/2} \rangle|^2$ und χ ein Phasenfaktor ist. Verläuft die Streuung nur über den Zustand $i' = 3/2$, dann wird $d\sigma_I : d\sigma_{II} : d\sigma_{III} = 9 : 1 : 2$ in weitgehender Übereinstimmung mit dem Experiment ([137], bzw. [138, 142]). Bei Abhängigkeit der Streuwelle vom Spin s' des Nukleons, wie sie hier in Erscheinung tritt, muß der Winkelfaktor (51) modifiziert werden, da nun die Komponente $(2l' + 1) P_{l'}(\cos \vartheta) |s_{\frac{1}{2}}\rangle = (-)^{l'} \sqrt{4\pi(2l' + 1)} |l'_0 s_{\frac{1}{2}}\rangle$ (vgl. (80)!) als eine Überlagerung zweier Eigenzustände des Gesamtdrehimpulses j mit $j' = l' \pm 1/2$ betrachtet werden muß [164]. Betrachten wir zunächst $s_3' = 1/2$: Nach (36) und (40) ist:

$$\begin{aligned} |l'_0 s_{\frac{1}{2}}^{1/2}\rangle &= (2l' + 1)^{-1/2} \{ \sqrt{l' + 1} |l'_{\frac{1}{2}}^{l' + 1/2}\rangle - \sqrt{l'} |l'_{\frac{1}{2}}^{l' - 1/2}\rangle \}, \\ |j_{\frac{1}{2}}^{l' + 1/2}\rangle &= (2l' + 1)^{-1/2} \{ \sqrt{l'} |l'_1 s_{\frac{1}{2}}^{1/2}\rangle + \sqrt{l' + 1} |l'_0 s_{\frac{1}{2}}^{1/2}\rangle \}, \\ |j_{\frac{1}{2}}^{l' - 1/2}\rangle &= (2l' + 1)^{-1/2} \{ \sqrt{l' + 1} |l'_1 s_{\frac{1}{2}}^{1/2}\rangle - \sqrt{l'} |l'_0 s_{\frac{1}{2}}^{1/2}\rangle \}. \end{aligned} \quad (160)$$

Setzen wir (160) in den Ausdruck für $(2l' + 1) P_{l'}(\cos \vartheta)$ ein, so geht $f(\vartheta)$ (51) über in:

$$f\left(\vartheta, s'_3 = \frac{1}{2}\right) = (\hbar/k) \sum_{l=0}^{\infty} \{(l+1) A_l^+ + l A_l^-\} P_l(\cos \vartheta) | s^{\frac{1}{2}} \rangle + \quad (161 \text{ a})$$

$$+ (\hbar/k) \sum_{l=0}^{\infty} \{A_l^- - A_l^+\} e^{i\varphi} \sin \vartheta P_l'(\cos \vartheta) | s_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \rangle,$$

wo φ den Azimut um die Einfallrichtung bildet. Analog wird für $s'_3 = -1/2$:

$$f\left(\vartheta, s'_3 = -\frac{1}{2}\right) = (\hbar/k) \sum_{l=0}^{\infty} \{(l+1) A_l^+ + l A_l^-\} P_l'(\cos \vartheta) | s_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \rangle - \quad (161 \text{ b})$$

$$- (\hbar/k) \sum_{l=1}^{\infty} \{A_l^- - A_l^+\} e^{-i\varphi} \sin \vartheta P_l'(\cos \vartheta) | s_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \rangle.$$

Dabei wurde (80) verwendet. Es bedeutet $A_l^j = e^{i\delta_l^j} \sin \delta_l^j$, wobei wir + bzw. - für $j' = 3/2$, bzw. $1/2$ geschrieben haben. Berücksichtigen wir in (161) die isotopen Spinzustände gemäß (158) und setzen wir $A_{l'}^{j'j''} = e^{i\delta_{l'}^{j'j''}} \sin \delta_{l'}^{j'j''}$, dann ergeben sich die differentiellen Streuquerschnitte durch Mittelung über die Quadrate der Absolutbeträge und nach Summation über die Spinkomponenten zu:

$$(k/\hbar)^2 (d\sigma_I/d\Omega) = |A_0^{+-} + (2A_1^{++} + A_1^{+-}) \cos \vartheta|^2 + |A_1^{+-} - A_1^{+-}|^2 \sin^2 \vartheta, \quad (162 \text{ a})$$

$$(k/\hbar)^2 (d\sigma_{II}/d\Omega) = (1/9) \{ |A_0^{+-} + 2A_0^{--} + (2A_1^{++} + A_1^{+-} + 4A_1^{+-} + 2A_1^{--}) \cos \vartheta|^2 + |A_1^{++} - A_1^{+-} + 2A_1^{+-} - 2A_1^{--}|^2 \sin^2 \vartheta \}. \quad (162 \text{ b})$$

$$(k/\hbar)^2 (d\sigma_{III}/d\Omega) = (2/9) \{ |A_0^{+-} - A_0^{--} + (2A_1^{++} + A_1^{+-} - 2A_1^{+-} - A_1^{--}) \cos \vartheta|^2 + |A_1^{++} - A_1^{+-} - A_1^{+-} + A_1^{--}|^2 \sin^2 \vartheta \}. \quad (162 \text{ c})$$

(162) ergibt für die Phasenanalyse der differentiellen Streuquerschnitte bei 58 [159], 110 und 135 MeV [137] ($T \dots$ kin. Energie der Pionen im L.S.):

T (MeV)	i'	$\delta_0^{i'-}$	$\delta_1^{i'-}$	$\delta_1^{i'+}$
58	3/2	-4,9°	-1,8°	7,6°
110	1/2	15°	0°	25°
135	1/2	1°	19°	1°
	3/2	25°	10°	35°

Die Vorzeichen der Phasen sind unsicher (für 58 MeV wurde $\delta_0 < 0$ angenommen, da dadurch das Experiment besser wiedergegeben wird). Diese Analyse zeigt gleichfalls das Vorherrschen des Zustandes mit $i' = j' = 3/2$. Zur Bestimmung des Vorzeichens von δ_l verwendet

BETHE [160] das Ergebnis von BYFIELD, KESSLER und LEDERMAN [161], daß sich die Interferenz zwischen Meson-Nukleonstreuung und COULOMB-Streuung an Kohlenstoff (60 MeV) für negative Pionen verstärkend und für positive Pionen schwächend auswirkt; dies spricht für eine anziehende Wechselwirkung. Die Phasenanalyse dieser Streuexperimente [162] zeigt, daß die P -Streuung dominiert, woraus man $\delta_1^{++} > 0$ folgern kann in Übereinstimmung mit dem JASTROWSCHEN Modell (s. u.).

Beschränken wir uns auf $i' = 3/2$, so folgt aus (162):

$$(k/\hbar)^2 (d\sigma_I/d\Omega) = |2A^{++} + A^{+-}|^2 \cos^2 \vartheta + \sin^2 (\delta^{++} - \delta^{+-}) \sin^2 \vartheta, \quad (162')$$

$$d\sigma_I : d\sigma_{II} : d\sigma_{III} = 9 : 1 : 2.$$

Die Behandlung der Pion-Nukleonstreuung nach der starken Kopplung [163—165] verwendet zwei Parameter, den Nukleonenradius a und die Isobarenenergie E_R : Um δ zu bestimmen, gehen wir zunächst phänomenologisch vor [166]: Die Wellenfunktion Φ des Pions im Zustand l' sei außerhalb des Nukleons ($r > a$) durch

$$\varphi = r\Phi = \exp\{-i[kr/\hbar - l\pi/2]\} - \exp\{i[kr/\hbar - l\pi/2 + 2\delta']\} \quad (163)$$

gegeben, dann ist $\sigma = (2l+1)(\pi\hbar^2/k^2) |e^{2i\delta} - 1|^2$, wo $\delta = \delta' + \pi l/2$. Sei $f = a(\varphi'/\varphi)|_{r=a}$, dann folgt mit (163) (wir setzen $ka = \hbar x$):

$$\exp(2i\delta) = \exp(-2ix) \frac{f+ix}{f-ix} \approx \frac{f+ix}{f-ix} \quad \text{für } ka \ll \hbar, \text{ das heißt:}$$

$\text{tg } \delta = x/f$. Hat f in $E = E_R$ eine Nullstelle, dann wird für $E \approx E_R$:

$$\text{tg } \delta = \frac{1}{2} \Gamma / (E_R - E), \quad (164)$$

wobei wir $\Gamma = -2x/(df(E_R)/dE)$ gesetzt haben. Aus den Randbedingungen für $r = a$ folgt:

$$\Gamma = -2(ka/\hbar)^3 \gamma / [1 + (ka/\hbar)^2], \quad (165)$$

wo γ eine Konstante bedeutet.

Um eine Beziehung zur schwachen Kopplungstheorie herzustellen, nehmen wir an, daß für kleine Energien (156) mit (162') übereinstimmt: Für $k \rightarrow 0$ gilt nach (165): $\delta \rightarrow 0$, somit gibt (162'):

$(k/\hbar)^2 (d\sigma_I/d\Omega) = 3\delta_1^{++}(\delta_1^{++} + \delta_1^{+-}) \cos^2 \vartheta + (\delta^{++} - \delta_1^{+-})^2$. Ein Vergleich mit (156) gibt $\delta_1^{++} = -2\delta^{+-} = -2\delta^{-+} = -1/2\delta^{--}$ und aus (164) und (165) folgt:

$$\begin{aligned} I^{++}/E^{++} &= -2I^{+-}/E^{+-} = -2I^{-+}/E^{-+} = -\frac{1}{2}I^{--}/E^{--} \equiv \\ &\equiv 2\varrho \equiv 2\varrho_0(k/mc)^3/[1 + (ka/\hbar)^2], \end{aligned} \quad (166)$$

das heißt:

$$(d\sigma_I/d\Omega) = (3\varrho_0/2\mu)^2 (k/mc)^4.$$

Identifiziert man dieses Ergebnis mit (156), so folgt

$$\varrho_0 = (2/3)(g^2/4\pi\hbar c). \quad (167)$$

(153), $\sigma_{3/2} = \sigma_I$ (162') und eine analoge Formel für $\sigma_{1/2}$ geben mit (166):

$$\begin{aligned} \frac{k^2}{4\pi\hbar^2} \frac{\sigma_I}{\varrho^2} &= \frac{2}{\varrho^2 + (E/E^{++} - 1)^2} + \frac{1}{\varrho^2 + 4(E/E^{+-} - 1)^2}, \\ \frac{k^2}{4\pi\hbar^2} \frac{\sigma_{II} + \sigma_{III}}{\varrho^2} &= \frac{2/3}{\varrho^2 + (E/E^{++} - 1)^2} + \frac{1/3}{\varrho^2 + 4(E/E^{+-} - 1)^2} + \\ &+ \frac{4/3}{\varrho^2 + (E/E^{-+} - 1)^2} + \frac{2/3}{\varrho^2 + (1/4)(E/E^{--} - 1)^2}. \end{aligned} \quad (168)$$

Um eine Aussage über die Größe der Resonanzenergien machen zu können, betrachten wir die Ergebnisse der starken Kopplungstheorie: PAULI und DANCOFF [163] gehen von einer HAMILTON-Funktion aus, deren Wechselwirkungsterm sich für $\partial_4 = 0$ durch eine Dichtefunktion $K(r)$ mit $\int K(r) dV = 1$ von (12 b) unterscheidet:

$$H' = - (g/\mu \sqrt{\hbar c}) K(r) (\vec{\sigma} \cdot \vec{V}) (\vec{\tau} \cdot \vec{\Phi}). \quad (169)$$

Für die Anregungsenergien des Nukleons ergibt sich dann:

$$E' = (3 a_0/4) (4\pi\hbar c/g^2) [j'(j' + 1) - 3/4] m c^2, \quad (170)$$

wobei der Kernradius a_0 durch

$$a_0^{-1} = \iint K(r') (1/r) K(r'') dV dV', \quad r = |r' - r''|$$

gegeben ist. Für (170) besteht weiters die Einschränkung: $i' = j'$, so daß bei πp -Streuung ein Nukleonisobar nur im Zustand $i' = j' = 3/2$ angeregt sein kann. Somit ist

$$E^{++} = (9/4) (a_0\mu) (4\pi\hbar c/g^2) m c^2, \quad (170')$$

während wir für die nichtisobaren Zustände $E_\lambda = -m c^2$ setzen. Setzt man (165), (167) und (170') in (166) ein, dann erhalten wir

$$\gamma = - (3 a_0/2) / (a\mu)^2. \quad (171)$$

Die phänomenologischen Konstanten ϱ_0 , a und E^{++} lassen sich aus dem Experiment zu $\varrho_0 = 0,23$, $(a\mu)^2 = 0,5$ und $E^{++} = 137$ MeV (das heißt: $E_{LS} = 168$ MeV) bestimmen. Für a_0 und g geben damit (167) und (170'):

$$(g^2/4\pi\hbar c) = 0,35; \quad a_0 = 0,152\mu^{-1} = \hbar/(M c). \quad (172)$$

BRUECKNER [167] kommt auch auf einem anderen Weg zu Resonanzenergien, indem er nach der Methode von BETHE (vgl. $p n$ - und $p p$ -Streuung) den Begriff der Streulänge a und der effektiven Reichweite r_0 auf die $\pi - N$ -Streuung anwendet: Ausgehend von einer SCHRÖDINGER-Gleichung $\{\Delta - \mu^2 + [(V - E)/(\hbar c)]^2\} \Phi = 0$ erhält BRUECKNER bei Beschränkung auf Pionen mit $l' = 1$:

$$(k/\hbar)^3 \operatorname{ctg} \delta_1 = 1/a^3 - (k^2/\hbar^2 r_0), \quad (173)$$

Es wird also $\delta_1 = \pi/2$ für $k/\hbar = (r_0/a^3)^{1/2}$.

Setzen wir $(c r_0/\hbar^2 \mu) k^3 = -\Gamma$ und $(r_0 m c^2/2 a \mu^2 a^2) = E_R$, dann können wir (173) auch in der Form $\operatorname{tg} \delta = 1/2 \Gamma/(E_R - E)$ schreiben, in Übereinstimmung mit (164).

Die reine S -Wellenstreuung wurde für $i' = 3/2$ von MARSHAK [168] untersucht; er findet bei Mesonenergien von 78, 113 und 135 MeV für δ_0 : $\pm 6^\circ$, $\pm 13^\circ$, $\pm 21^\circ$. Aus diesem Verlauf δ_0 kann man vermuten, daß δ_0 bei zirka 40 MeV sein Vorzeichen wechselt; dadurch ist ein Potential vom JASTROWSchen Typus (vgl. p - p -Streuung) nahegelegt. Zum Beispiel würde ein Potential der Form $V(r) = +\infty$ für $0 < r < r_0$, $V(r) = -V_0$ für $r_0 < r < r_0 + r_s$, $V(r) = 0$ für $r > r_0 + r_s$ mit $r_0 = 0,95 \cdot 10^{-13}$ cm, $r_s = 1,5 \cdot 10^{-13}$ cm und $V_0 = 100$ MeV δ_0 richtig wiedergeben. DRELL und HENLEY [169] haben durch eine geeignete Transformation des Wechselwirkungsterms gezeigt, daß dieser einen Ausdruck enthält, der einer starren Kugel entspricht (JASTROWSches Modell).

FUBINI [170] versuchte, die isobaren Nukleonzustände aus der TAMM-DANCOFF-Gleichung (vgl. (91), (92) und (94)) herzuleiten, wobei er sich auf $m = 1$ beschränkte. Ähnliche Versuche wurden von DYSON und Mitarbeitern [171] unternommen.

V. Nukleon-Pionen.

Übersteigt die kinetische Energie der einfallenden Protonen bei Beschuß von Wasserstoff die Schwellenenergie von 292 MeV (diese Energie entspricht der π^+ -Ruhenergie im Schwerpunktsystem), so kommt es entsprechend der Reaktion $p + p \rightarrow p + n + \pi^+$, bzw. $d + \pi^+$ zur Erzeugung positiver Pionen. Die π^+ -Erzeugung durch p - p -Zusammenstöße wurde bis zu Protonenergien von 380 MeV gemessen [172–180]. Für die Winkelverteilung der erzeugten Pionen im Schwerpunktsystem findet man [173, 180] eine Verteilung

$$(d\sigma_{pp\pi^+}/d\Omega) \sim (0,07 \pm 0,07 + \cos^2 \vartheta). \quad (174)$$

(DURBIN und Mitarbeiter [181] finden für den inversen Prozeß $\pi^+ + d \rightarrow p + p$: $d\sigma/d\Omega$ (S.S.) $\sim (\cos^2 \vartheta + 0,2)$). Die Energieverteilung der emittierten Mesonen weist ein scharfes Maximum gegen das hochenergetische Ende des Spektrums auf [186]. Unter Voraussetzung von (174) läßt sich aus den bei $\vartheta_{L.S.} = 90^\circ$ gemessenen Mesonverteilungen σ_{pp} für 341,

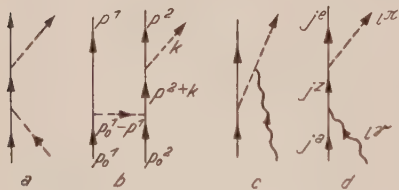


Abb. 3. Streuung und Erzeugung von Pionen.

345, 365 und 380 MeV zu 0,18; 0,35; 0,61 und 1,06 mb berechnen. Die Messung von $p + p \rightarrow p + p + \pi^0$ ergibt nach MARSHALL [179] für 430 MeV Protonen einen Wirkungsquerschnitt von $\sigma_{pp\pi^0} = (0,45 \pm 0,15)$ mb. Der Wirkungsquerschnitt für den Prozeß $p + n \rightarrow p + n + \pi^0$, bzw. $d + \pi^0$ wurde von HILDEBRAND [20] gemessen; er zeigt eine Winkelverteilung, welche mit (174) verträglich ist.

Der feldtheoretische Wirkungsquerschnitt entsprechend den FEYNMAN-Graphen vom Typus Abb. 3 b wurde für die PS Theorie von MORETTE [182] berechnet. Für nichtrelativistische Energien folgt aus

der Dichteverteilung der ungebundenen Endzustände ein Mesonspektrum (Schwerpunktsystem) [1]:

$$PS(PS): \quad (d\sigma/d\Omega d\tau) = \\ (1/\pi\mu^2) (f^2/4\pi\hbar c)^3 (m/2M)^3 \sqrt{\tau(\tau_m - \tau)/2} A(t, \lambda), \quad (175)$$

$$PS(PV): \quad (d\sigma/d\Omega d\tau) =$$

$$(1/\pi\mu^2) (g^2/4\pi\hbar c)^3 (2M/m)^2 \tau \sqrt{\tau(\tau_m - \tau)/2} A(t, \lambda) (3\cos^2\vartheta + 1).$$

Dabei ist $\tau = E^\pi/mc^2 - 1$, $\tau_m = E_m^\pi/mc^2 - 1$, wo E_m^π die maximale Energie der Pionen im Schwerpunktsystem bedeutet:

$E_m^\pi = [Mc^2/2 \sqrt{2(1+\gamma)}] \cdot [(m/M)^2 + 2(\gamma-1)]$, $\gamma = E^p/Mc^2$ ($E^p \dots$ Protonenergie im L.S.). $A(t, \lambda)$ ist eine Funktion des isotopen Drehimpulses der Anfangsnukleonen und des emittierten Pions:

t_3'	1			0			-1		
λ_3'	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1
$A(PS)$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	1	3
$A(PV)$	1	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	0	1

Die Winkelverteilung (174) spricht für $PS(PV)$. Für den totalen nichtrelativistischen Wirkungsquerschnitt erhält MORETTE:

$$\sigma = 24\pi (f^2/4\pi\hbar c)^3 (\hbar/Mc^2) (E/Mc^2)^{-3/2} [E/Mc^2 - (m/M)^2 + 2(m/M)]^2, \quad (176)$$

wo E die kinetische Energie des einfallenden Nukleons bedeutet. $\sigma = 1,06$ mb für $E = 380$ MeV gibt $f^2/4\pi\hbar c = 0,26$.

Das scharfe Maximum am Ende des Mesonenergiespektrums zeigt, daß die Nukleonen, welche den Großteil ihrer Energie an das Pion abgegeben haben, nicht mehr als frei betrachtet werden können, sondern ein Deuteron bilden oder wenigstens einander stark stören werden. Die beiden Protonen im Anfangszustand sind so energiereich, daß man sie als ebene Wellen betrachten kann. Hingegen werden die Wellenfunktionen des Endprotons und Endneutrons stark von ebenen Wellen abweichen. FERMI [183] zeigte für eine p - n -Wechselwirkung der Form $V(r) = -V_0$, bzw. 0 für $r <$ bzw. $> r_0$, daß der Wirkungsquerschnitt für ebene Endwellen mit einem Faktor

$$(p^2 + M V_0) / [p^2 + M V_0 \cos^2(a \sqrt{p^2 + M V_0} / \hbar)] \quad (177)$$

multipliziert werden muß, wobei p der Relativimpuls zwischen den beiden Endnukleonen ist und mit dem Mesonimpuls k (Schwerpunktsystem) durch $p^2 = MT - 1/2 k^2 (M/m + 1/2)$ verbunden ist (T bedeutet die gesamte kinetische Energie der Endprodukte im Schwerpunktsystem). (177) zeigt, daß der Wirkungsquerschnitt für kleines p ($k \approx k_{max}$) sehr groß wird, wodurch das starke Maximum für große Mesonenergien verständlich erscheint.

Wir wollen nun untersuchen, welche Beziehungen sich für die Erzeugungsquerschnitte ergeben, wenn wir annehmen, daß der entscheidende Beitrag zur Pionerzeugung durch Übergänge geliefert wird, welche über einen isobaren Nukleonenzustand führen. Bezüglich der Parität gilt folgende Einschränkung: Da die Pionen P S sind, kommen für das Zweinukleonensystem nur folgende Bahndrehimpulsübergänge in Frage: $P \rightarrow S$ ($l^\pi = 0$) und $S, D \rightarrow S$ ($l^\pi = 1$). (Wir wollen für das Nukleonensystem nur S -Endzustände berücksichtigen.) Die Erhaltung des gesamten isotopen Spins I , welche durch (22) garantiert ist, gibt noch mehrere Auswahlregeln für die Übergangselemente zwischen verschiedenen Ladungszuständen, welche wir entsprechend (23) und (31) bezeichnen. Die möglichen Zweinukleonen-Anfangszustände sind t_1^1, t_0^1, t_{-1}^1 und t_0^0 . Betrachten wir als Beispiel den Anfangszustand t_0^0 : (22) gibt

$$M I_1 |t_0^0\rangle = I_1 M |t_0^0\rangle, \quad M I_2 |t_0^0\rangle = I_2 M |t_0^0\rangle. \quad (178)$$

Nun ist nach (16 a) $I_1 |t_0^0\rangle = I_2 |t_0^0\rangle = 0$, daraus folgt mit (178): $I_1 M |t_0^0\rangle = I_2 M |t_0^0\rangle = 0$; das heißt mit

$$\begin{aligned} \langle t_0^1 \lambda_{-1}^1 | 1/2 (I_1 + i I_2) &= \langle t_1^1 \lambda_{-1}^1 | + \langle t_0^1 \lambda_0^1 |, \\ \langle t_1^1 \lambda_{-1}^1 | M | t_0^0 \rangle &= - \langle t_0^1 \lambda_0^1 | M | t_0^0 \rangle = M_1. \end{aligned}$$

Auf diese Weise ergeben sich folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} \langle t_{-1}^1 \lambda_1^1 | M | t_0^0 \rangle &= - \langle t_0^1 \lambda_0^1 | M | t_0^0 \rangle = \langle t_1^1 \lambda_1^1 | M | t_0^0 \rangle = M_1, \\ \langle t_1^1 \lambda_0^1 | M | t_1^1 \rangle &= - \langle t_0^1 \lambda_1^1 | M | t_1^1 \rangle = \langle t_1^1 \lambda_{-1}^1 | M | t_1^1 \rangle = \\ &= \langle t_0^1 \lambda_{-1}^1 | M | t_{-1}^1 \rangle = \langle t_{-1}^1 \lambda_0^1 | M | t_{-1}^1 \rangle = M_2, \\ \langle t_0^0 \lambda_1^1 | M | t_1^1 \rangle &= \langle t_0^0 \lambda_0^1 | M | t_1^1 \rangle = \langle t_0^0 \lambda_{-1}^1 | M | t_{-1}^1 \rangle = M_3, \\ \langle t_0^0 \lambda_0^1 | M | t_0^0 \rangle &= \langle t_0^0 \lambda_0^1 | M | t_0^0 \rangle = 0. \end{aligned} \quad (179)$$

Wird ein Pion in den S -, bzw. P -Zustand emittiert, dann stellen sich somit die Übergänge des Zweinukleonensystems folgendermaßen dar:

$l^\pi = 0$	$l^\pi = 1$
$p p \rightarrow \pi^+ + n p \left\{ \begin{array}{l} {}^3P_0 \rightarrow {}^1S_0 \\ {}^3P_1 \rightarrow {}^1S_1 \end{array} \right\} M_2$	${}^1S_0, {}^1D_2 \rightarrow {}^3S_1 \quad M_3$
$p p \rightarrow \pi^0 + p p \quad {}^3P_0 \rightarrow {}^1S_0 \quad M_2$	verboten 0
$n p \rightarrow \pi^+ + n n \quad {}^3P_0 \rightarrow {}^1S_0 \quad M_2$	${}^3S_1, {}^3D_1 \rightarrow {}^1S_0 \quad M_1$
$n p \rightarrow \pi^- + p p \quad {}^3P_0 \rightarrow {}^1S_0 \quad M_2$	${}^3S_1, {}^3D_1 \rightarrow {}^1S_0 \quad M_1$
$n p \rightarrow \pi^0 + n p \left\{ \begin{array}{l} {}^3P_0 \rightarrow {}^3S_0 \\ {}^3P_1 \rightarrow {}^3S_1 \end{array} \right\} M_3$	$\left\{ \begin{array}{l} {}^3S_1, {}^3D_1 \rightarrow {}^1S_0 \\ {}^1S_0, {}^1D_2 \rightarrow {}^3S_1 \end{array} \right\} M_3$

Durch den Zusammenstoß der beiden Nukleonen möge das Nukleon a vom Nukleon b angeregt werden. Die $\pi - N$ -Streuung legt nahe, daß der Prozeß über einen isobaren Nukleonenzustand mit $s_a = 3/2$ führt [184, 185]. Dies gibt für das Zweinukleonensystem $s' = 2$, wo

$s'(s' + 1) = (\vec{s}_a + \vec{s}_b)^2$. Damit der Drehimpuls erhalten bleibt, muß der Anfangszustand ein D -Zustand sein ($l' = 0$ im Zwischenzustand, da sonst kein S -Endzustand mehr möglich ist). Dadurch ergibt sich nach dem Übergangsschema: 1. $\sigma(p p \pi^0)$ sehr klein; 2. $\sigma(p n \pi^0)$, $\sigma(p n, \pi^+) \gg \sigma(p p, \pi^0)$; 3. $\sigma(p p \pi^+) \sim \cos^2 \vartheta_{SS}$; 4. Überwiegen von 3S_1 gegenüber 1S_0 im Endzustand bei $(p p \pi^+)$ (starke Wahrscheinlichkeit für Deuteronbildung); 5. Bei Deuteronbildung gilt: $\sigma(p n, \pi^0) = 1/2 \sigma(p p, \pi^+)$. (Der Faktor $1/2$ kommt wegen verschiedener Normierung des einfallenden Strahls.) 1. und 2. sind in Übereinstimmung mit der Erfahrung [186, 187], da $\sigma(p p, \pi^0)$ erst bei hohen Protonenergien (> 400 MeV) in die Größenordnung von $\sigma(p p, \pi^+)$ kommt. 3. Ist in Übereinstimmung mit (174). 4. Wurde durch den Nachweis von Deuteron- π^+ -Koinzidenzen [188] bestätigt. PETERSON, ILLOFF und SHERMAN [172] finden bei einer Protonenergie von 340 MeV und $\vartheta = 18^\circ$: $\sigma(p p \rightarrow d \pi^+) / \sigma(p p \rightarrow n p \pi^+) = (55 \pm 10) / (45 \pm 10)$. 5. Wurde durch die Experimente von HILDEBRAND [20] bestätigt.

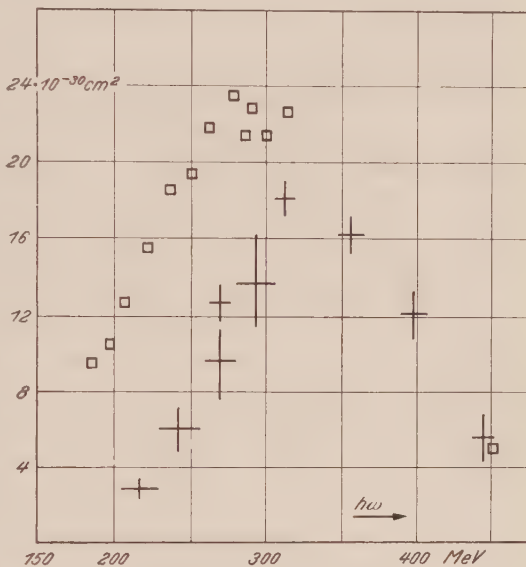


Abb. 4. Photoerzeugung von π^+ (\square) und π^0 (+) in H: $d\sigma/d\Omega$ bei $\vartheta = 90^\circ$ L.S. nach [192, 195, 197, 198].

VI. Photopionen.

Treffen die von hochenergetischen Elektronen ausgesandten Bremsquanten auf Wasserstoff, so werden positive und neutrale Pionen gemäß $\gamma + p \rightarrow n + \pi^+$ (σ^+) und $\gamma + p \rightarrow p + \pi^0$ (σ^0) erzeugt [189]. Im L.S. beträgt die Mindestenergie der Photonen, die notwendig ist, um ein ruhendes Pion im S.S. zu erzeugen: $\hbar\omega_S = mc^2(1 + m/2M)$, wo ω_S die Schwellenfrequenz bedeutet: $\hbar\omega_S = 151$ MeV für π^+ und 145 MeV für π^0 . Der differentielle W. Q. für die Erzeugung positiver Pionen $d\sigma^+/d\Omega$ wurde bei $\vartheta_{L.S.} = 90^\circ$ für Photonenergien bis $\hbar\omega = 475$ MeV gemessen [190—192]. Den Verlauf zeigt Abb. 4. Die Winkelverteilung der erzeugten Pionen ergibt sich [193—194] für $\hbar\omega = 278$ MeV zu

$$d\sigma^+/d\Omega = (1,46 \pm 0,16) [(0,72 \pm 0,15) - (0,45 \pm 0,10) \cos \vartheta + \sin^2 \vartheta] \cdot 10^{-29} \text{ cm}^2$$

im S.S. Die Winkelverteilung im S.S. ist also stark asymmetrisch um 90° , und zwar ändert sich die Art der Asymmetrie von niederen zu hohen Energien: Für $\hbar\omega < 325 \text{ MeV}$ ergibt sich ein rückwärtiges Maximum, während für $\hbar\omega > 375 \text{ MeV}$ die erzeugten Pionen ein vorderes Maximum aufweisen [192]. Der totale W.Q. beträgt für $\hbar\omega = 255$, bzw. 278 MeV : $\sigma^+ = (0,19 \pm 0,03)$ [195], bzw. $(0,25 \pm 0,05) \text{ mb}$ [194]. Er erreicht bei $\hbar\omega = 290 \text{ MeV}$ ein Maximum und fällt bis 450 MeV auf ein Drittel des maximalen Wertes ab [192]. Die Erzeugung neutraler Pionen wurde für $\vartheta_{L.S.} = 90^\circ$ bis $\hbar\omega = 450 \text{ MeV}$ gemessen [196—198]. Die Abhängigkeit des W.Q. von der Energie ist ebenfalls in Abb. 4 dargestellt. Bis $\hbar\omega = 300 \text{ MeV}$ läßt sich der experimentelle Verlauf von $d\sigma^0$ durch

$$(d\sigma^0/d\Omega) (\vartheta_{L.S.} = 90^\circ) = 0,012 [\hbar(\omega - \omega_S)/mc^2]^{1,9 \pm 0,4} \text{ mb}$$

darstellen. Die Winkelverteilung der emittierten Pionen im S.S. ist mit $(d\sigma^0/d\Omega) \sim (2 + 3 \sin^2 \vartheta)$ verträglich [196—197, 199—200].

Die feldtheoretische Berechnung des W.Q. nach der Methode der schwachen Kopplung erfolgt entsprechend den FEYNMAN-Graphen vom Typus Abb. 3 c und d. Dabei haben wir für die $N - \gamma$ -, bzw. $\pi - \gamma$ -Wechselwirkung folgende Terme der HAMILTON-Funktionsdichte zu verwenden:

$$H_{N\gamma'} = -i\varepsilon \bar{\psi} \gamma_\nu \frac{1}{2} (1 - \tau_3) A_\nu \psi, \quad (180 a)$$

$$H_{\pi\gamma'} = (i\varepsilon c/\hbar) \Phi_{1\nu} A_3 \Phi A_\nu, \quad (180 b)$$

wo A_ν das elektromagnetische Viererpotential bedeutet; hingegen steht für die $N - \pi$ -Wechselwirkung der Ausdruck (12). (Mit Hilfe von (25) und (26) kann man (180 b) in der Form $H_{\gamma\pi'} = -(1/c) j_\nu^\pi A_\nu$ schreiben, wo $j_\nu^\pi = -(i\varepsilon c^2/\hbar) (\Phi^+ \Phi_{1\nu}^- - \Phi^- \Phi_{1\nu}^+)$ die Dichte des Mesonstromes darstellt.) Beschränken wir uns auf Übergänge erster Ordnung in ε und g , so erhalten wir:

$$\frac{d\sigma^+}{d\Omega^{LS}} = \alpha \frac{g^2}{4\pi\hbar c} \cdot \frac{k}{Mc} \cdot$$

$$\cdot \frac{1 - 1/2 [m\hbar c/M\xi(E - \hbar c x)]^2 (1 - x^2) - (E - \hbar c x)/Mc^2}{\xi [1 + \xi (1 - Ex/\hbar c)]}, \quad (181 a)$$

$$\frac{d\sigma^-}{d\sigma^+} = \left(\frac{2\xi}{2E/Mc^2 - (m/M)^2} \right)^2, \quad \frac{d\sigma^0}{d\sigma^+} = \frac{1}{2} \left(\frac{2(\xi - E/Mc^2) + (m/M)^2}{2\xi - (m/M)^2} \right)^2. \quad (181 b)$$

Die Umrechnung auf das S.S. erfolgt mit

$$\cos \vartheta_{S.S.} = [x(1 + 2\xi) - \xi(1 + \xi)(1 - x^2)] / [(1 + \xi)^2 - x^2 \xi^2].$$

$d\sigma^-$ bedeutet den W.Q. für den Prozeß $\gamma + n \rightarrow p + \pi^-$. $\xi = \hbar\omega/Mc^2$, $x = \cos \vartheta_{L.S.}$, wo ϑ der Winkel zwischen der Richtung des einfallenden Photons ($\vec{\omega}$) und des emittierten Mesons (\vec{k}) ist. \hbar bedeutet wieder den

Mesonimpuls. Im L.S. sind k , ω und ϑ nicht voneinander unabhängig, sondern wegen Energie- und Impulserhaltung durch

$$\hbar \omega + M c^2 = c \sqrt{(m c)^2 + k^2} + \\ + \sqrt{(M c)^2 + (\hbar \omega)^2 + (k c)^2 - (2 k c) (\hbar \omega) \cos \vartheta}$$

miteinander verbunden. $E = c \sqrt{(m c)^2 + k^2}$. In dieser störungstheoretischen Näherung ist das Äquivalenztheorem anwendbar, das heißt der für die $PS(PV)$ Theorie hergeleitete W.Q. (181) gilt auch für die $PS(PS)$ Theorie mit $f = g(2M/m)$. Für $\omega \approx \omega_s$ folgt aus (181):

$$\frac{d\sigma^+}{d\Omega} = \frac{1}{\mu^2} \left(\frac{\varepsilon g}{4\pi \hbar c} \right)^2 \frac{k c}{\hbar \omega} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{m k c^3 \sin \vartheta}{\hbar \omega (\hbar \omega - k c \cos \vartheta)} \right)^2 \right], \quad (181 a')$$

$$d\sigma^-/d\sigma^+ = 1, \quad d\sigma^0/d\sigma^+ = 0. \quad (181 b')$$

Die Kleinheit von $d\sigma^0/d\sigma^+$ rührt daher, daß für das neutrale Pion nur Graphen vom Typus Abb. 3 d in Frage kommen. (181 a') gibt integriert:

$$\sigma^+ = \frac{2\pi}{\mu^2} \left(\frac{\varepsilon g}{4\pi \hbar c} \right)^2 \left[\frac{2 k c}{\hbar \omega} \left(1 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2 \omega^2} \right) - \left(\frac{m c^2}{\hbar \omega} \right)^2 \ln \left| \frac{\hbar \omega + k c}{\hbar \omega - k c} \right| \right]. \quad (182)$$

Der Vergleich von Theorie und Experiment ergibt folgendes: $(d\sigma^+/d\Omega) (\partial_{L.S.} = 90^\circ)$ zeigt das experimentell festgestellte Ansteigen mit der Energie des einfallenden Photons bis zu einem Maximum bei $\hbar \omega \approx 250$ MeV, um dann für größere Energien langsam abzufallen. Der steile Abfall ergibt sich also nicht; das ist aber auch nicht zu erwarten, da die erste Näherung in g wohl kaum für $\hbar \omega > 250$ MeV in Anspruch genommen werden kann. Allerdings wäre eine Kopplungskonstante mit $g^2/4\pi = 2 \hbar c$ notwendig, um das Maximum quantitativ wiederzugeben. Für die Voraussage $\sigma^- > \sigma^+$ scheint die Pionerzeugung in Beryllium zu sprechen [205, 206]. Allerdings bieten die Deuteronexperimente [206] Schwierigkeiten. Die Erzeugung neutraler Pionen ergibt sich für $\omega \approx \omega_s$ viel kleiner als σ^+ in Übereinstimmung mit (181 b); allerdings wird für größere Energien $d\sigma^0 \approx d\sigma^+$. Wird in der $p-\gamma$ -Wechselwirkung ein PAULI-Term

$H_{pp'} = \mu_p \bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} \psi (A_{\mu 1\nu} - A_{\nu 1\mu})$ berücksichtigt, wo $\sigma_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} i (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu)$ und μ_p das anomale magnetische Moment des Protons in Kernmagnetonen bedeutet, so erhalten wir einen zusätzlichen Beitrag zur π^0 -Erzeugung [207—208]:

$$(d\sigma^0/d\Omega) = (a/\mu^2) (g^2/4\pi \hbar c) (\mu_p/4 \xi) (k/Mc)^3 (1 + \cos^2 \vartheta) \quad \text{für } m \ll M. \quad (183)$$

Oder:

$$\sigma^0 = (4\pi/3\mu^2) (g^2/4\pi \hbar c)^2 \mu_p^2 (\hbar^3/m M^2 c^3). \quad (183')$$

Aber auch dieser zusätzliche Beitrag vergrößert das Verhältnis nicht wesentlich. Die schwache Kopplungstheorie scheint also nur für Photonenenergien anwendbar zu sein, die nicht weit über der Schwellenenergie

liegen. Für höhere Energien weisen sowohl das große π^0/π^+ -Verhältnis als auch die starke π^+ -Erzeugung auf einen Einfluß isobarer Nukleon-zustände hin; auf diese soll daher im folgenden noch eingegangen werden.

Der Einfluß isobarer Nukleonzustände auf die Photomesonerzeugung wurde vor allem von WATSON und BRUECKNER [184] und von FELD [209] behandelt: Absorbiert das Proton ein γ -Quant mit Drehimpuls l' , dann kann das Proton in einen isobaren Zustand mit Drehimpuls j^z angeregt werden. Dieser Zustand kann wieder in ein normales Proton mit Drehimpuls j^e und ein Pion mit Bahndrehimpuls l^π zerfallen (vgl. Abb. 3 d). HAMILTON [210] zeigte, daß, wenn eine Reaktion über einen Zwischenzustand mit bestimmten Drehimpuls verläuft, die Winkelverteilung der Endreaktion weitgehend unabhängig von der Wechselwirkungsform ist. Beschäftigen wir uns zunächst mit der neutralen Pionerzeugung: Definiert der γ -Strahl die z -Achse, dann beträgt nach HAMILTON [210] der differentielle W.Q.:

$$\begin{aligned}
 (d\sigma/d\Omega) = \sum_{j_3^a, l_3^\pi, l_3^{\gamma}} |M(j_3^a, l_3^{\gamma}; j_3^z; j_3^e, l_3^\pi) C_{j_3^a, l_3^{\gamma}}(j_3^z, j_3^z; j_3^a, l_3^\pi) \mathfrak{Y}_{l_3^{\gamma}}^{l_3^{\gamma}}(0) \cdot \\
 \cdot C_{j_3^e, l_3^\pi}(j_3^z, j_3^z; j_3^e, l_3^\pi) Y_{l_3^z}^{j_3^z}(\vartheta, \varphi)|^2.
 \end{aligned} \quad (184)$$

Dabei ist M das Matricelement für den Prozeß, die CLEBSCH-GORDAN-schen Koeffizienten C sind durch (35) bestimmt. Die vektoriellen Kugelfunktionen $\mathfrak{Y}_l^m(\vartheta, \varphi)$ sind durch

$$\mathfrak{Y}_l^m(\vartheta, \varphi) = \sum_{m=-l}^l \sum_{s_3=-1}^1 C_{l,1}(l, m; m, s_3) Y_{l,m}(\vartheta, \varphi) |s_{s_3}^1\rangle \quad (185)$$

gegeben, wo $Y_{l,m}$ durch (80) gegeben ist und $|s_{s_3}^1\rangle$ die Eigenvektoren des Photonenspins darstellen:

$$|s_{\pm 1}^1\rangle = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 \pm i \mathbf{e}_2), \quad |s_0^1\rangle = \mathbf{e}_3. \quad (186)$$

Wegen Drehimpulserhaltung gilt: $j_3^a + l_3^\gamma = j_3^z = j_3^e + l_3^\pi$. Die Berechnung von (184) führt für verschiedene Paritätseigenschaften und l' des Photons nach FELD zu folgendem Ergebnis:

l'	γ -Parität	j^z	l^π	$(d\sigma/d\Omega)_{SS}$
1	+	1/2	1	$\sim k^3$
	+	3/2	1	$\sim k^3 (2 + 3 \sin^2 \vartheta)$
1	—	1/2	0	$\sim k$
	—	3/2	2	$\sim k (2 + 3 \sin^2 \vartheta)$
2	—	3/2	1	$\sim k (1 + \cos^2 \vartheta)$
	—	5/2	3	$\sim k (1 + 6 \cos^2 \vartheta - 5 \cos^4 \vartheta)$

(187)

\mathfrak{k} bedeutet wieder den Mesonimpuls (S.S.) und $\vartheta = \vartheta_{SS}$ den Winkel zwischen \mathfrak{k} und $\vec{\omega}$. ($d\sigma/d\Omega$) hängt also nur von j^z und l^y ab. Dies ist insofern verständlich, als beim inversen Prozeß, bei einer Pionabsorption längs der z -Achse, j_3^z seinen Wert nicht ändern kann und daher unabhängig von l^z zu gleichen Zwischenzuständen führen muß ($j_3^a = j_3^z$). Der experimentelle W.Q. im S.S. ist proportional k^3 [200] und weist, wie bereits erwähnt, eine Winkelverteilung $\approx (2 + 3 \sin^2 \vartheta)$ auf. Dies spricht nach (187) für eine bevorzugte Absorption von magnetischen Dipol- γ -Quanten ($l^y = 1$, positive Parität) und einen Zwischenzustand mit $j^z = 3/2$. (Bei magnetischer Dipolabsorption müssen die emittierten Pionen $l^z = 1$ besitzen, da durch die γ -Absorption die Parität des Protons unverändert bleibt, ein P S-Pion daher nur mit $l^z = 1, 3, \dots$ emittiert werden kann. $l^z > 2$ ist aber bei $j^z = 1/2, 3/2$ nicht mehr möglich.) Berücksichtigt man noch elektrische Dipolabsorption ($l^y = 1$, negative Parität) bei einem Zwischenzustand mit $j^z = 1/2$, dann ist

$$(d\sigma/d\Omega) = |M_-|^2 + 2 \operatorname{Re} (M_- M_+^*) \cos \vartheta + 1/2 |M_+|^2 (2 + 3 \sin^2 \vartheta),$$

wobei M_- , bzw. M_+ das Matrixelement für die Photo- π^0 -Erzeugung darstellt, wenn ein magnetisches, bzw. ein elektrisches Dipol- γ -Quant absorbiert wird.

Die Prozesse $\gamma + p \rightarrow p + \pi^0$ und $\gamma + p \rightarrow n + \pi^+$ unterscheiden sich bei Beschränkung auf Übergänge der Art Abb. 3 d nur durch ihren isotopen Spin. Nun ist nach (32) und (36):

$$\begin{aligned} |n\pi^+\rangle &= |t_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \lambda_{-1}^1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|i^{\frac{3}{2}}\rangle + \sqrt{2} |i^{\frac{1}{2}}\rangle), \\ |p\pi^0\rangle &= |t_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \lambda_0^1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (\sqrt{2} |i^{\frac{3}{2}}\rangle - |i^{\frac{1}{2}}\rangle). \end{aligned} \quad (188)$$

Für beide Zustände ist natürlich $t' = 1/2$, $\lambda' = 1$, $i_3' = -1/2$. Die Erzeugung neutraler Pionen zeigt offenbar, daß der Beitrag vom Zwischenzustand $j' = 1/2$ zu vernachlässigen ist. Daher können wir nach (188) setzen:

$$\sqrt{2} |i^{\frac{3}{2}} j^{\frac{1}{2}}\rangle = |i^{\frac{1}{2}} j^{\frac{3}{2}}\rangle. \quad (189)$$

Weiters zeigt die π - p -Streuung, daß

$$|i^{\frac{3}{2}} j^{\frac{3}{2}}\rangle \gg |i^{\frac{1}{2}} j^{\frac{3}{2}}\rangle \quad (190)$$

[137, 139, 155]. Mit (189) und (190) folgt aus (188): $\sigma^0 = 2 \sigma^+$. Soweit also der Graph Abb. 3 d für die Pionerzeugung durch Photonen maßgebend ist, ist die neutrale Pionerzeugung doppelt so groß als die der positiven Pionen. Dies vergrößert auch das π^0/π^+ -Verhältnis wesentlich.

Zur Berechnung der Energieabhängigkeit des W.Q. beschränken wir uns für die π^0 -Erzeugung auf $i' = j' = 3/2 (+\pi)$, während wir für die π^+ -Erzeugung außerdem $i' = j' = 1/2 (-\pi)$ berücksichtigen wollen. Dadurch erhalten wir:

$$(d\sigma^+ / d\Omega) = (1/6) (c/2\omega)^2 \{ (9/2) |M_0^{--}|^2 + 1/2 |M_1^{++}|^2 (2 + 3 \sin^2 \vartheta) + 3 \sqrt{2} \operatorname{Im} (M_0^{--*} M_1^{++}) \cos \vartheta \}, \quad (191 \text{ a})$$

$$(d\sigma^0 / d\Omega) = (1/6) (c/2\omega)^2 |M_1^{++}|^2 (2 + 3 \sin^2 \vartheta). \quad (191 \text{ b})$$

Dabei ist $M_{l'}^{i'j'}$, bzw. $M_{l'}^{--}$ das Matricelement für den Prozeß, bei dem im Zwischenzustand $i' = j' = 3/2$, bzw. $1/2$ und das Pion mit einem Drehimpuls l' emittiert wird. Wie wir sahen, können wir uns für π^0 auf $l' = 1$ beschränken. Verwenden wir die Methoden von WIGNER und EISENBUD, dann schreibt sich unsere Matrix in der Form:

$$M_{l'}^{i'j'} = \sqrt{\Gamma_{l'}^{i'j'}(\pi)} \Gamma_{l'}^{i'j'}(\gamma) / (E_{l'}^{i'j'} - E - 1/2 i \Gamma_{l'}^{i'j'}), \quad (190)$$

wobei $\Gamma(\pi)$, bzw. $\Gamma(\gamma)$ die Pion-, bzw. γ -Linienbreite und Γ die totale Niveaubreite bedeuten. Wegen $\Gamma(\gamma) \ll \Gamma(\pi)$ können wir $\Gamma = \Gamma(\pi)$ setzen. Für Γ_1^{++} / E_1^{++} verwenden wir die Werte der $\pi - N$ -Streuung:

$$\Gamma_1^{++} / E_1^{++} = 2 \varrho = 2 \varrho_0 (k/mc)^3 [1 + (k a/\hbar)^2] \quad (166)$$

mit einer Resonanzenergie $E_R = E_1^{++} = 137 \text{ MeV}$ und $\varrho_0 = 0,23$. Werden die Pionen in einen S -Zustand emittiert ($l' = 0$), so wird nach der starken Kopplungstheorie $|E_0^{i'j'}| \gg mc^2$, so daß die kinetische Energie E gegen $E_0^{i'j'}$ zu vernachlässigen ist. Da die Niveaubreiten von $\omega^{2l'+1}$ abhängen, können wir somit bei Verwendung von (190) und (166) schreiben:

$$M_0^{--} = \alpha_1 (k c \hbar \omega)^{1/2} / mc^2,$$

$$M_1^{++} = \beta_1 (k c \hbar \omega)^{3/2} / (mc^2)^3 \cdot 1 / (1 - E/E_R - i \varrho), \quad (192)$$

wobei α_1 und β_1 dimensionslose, energieunabhängige Parameter sind. (191) und (192) geben:

$$\frac{d\sigma^\pm}{d\Omega^{SS}} = \frac{1}{6} \left(\frac{c}{2\omega} \right)^2 \left\{ \frac{9\alpha_1^2}{2} \cdot \frac{k c \cdot \hbar \omega}{m^2 c^4} + \frac{1}{2} \beta_1^2 \left(\frac{k \hbar \omega}{m^2 c^3} \right)^3 \frac{2 + 3 \sin^2 \vartheta}{(1 - E/E_R)^2 + \varrho^2} + \alpha_1^2 \frac{3 \sqrt{2} \varrho \sqrt{\hbar \omega k c \cos \vartheta}}{m [(1 - E/E_R)^2 + \varrho^2]} \right\}, \quad (193 \text{ a})$$

$$\frac{d\sigma^0}{d\Omega^{SS}} = \frac{\beta_1^2}{6} \left(\frac{c}{2\omega} \right)^2 \left(\frac{k \hbar \omega}{m^2 c^3} \right)^3 \frac{2 + 3 \sin^2 \vartheta}{(1 - E/E_R)^2 + \varrho^2}. \quad (193 \text{ b})$$

Dies gibt für die totalen W.Q^e:

$$\sigma^\pm = \frac{3\pi}{4\mu^2} \alpha_1^2 \frac{k c}{\hbar \omega} + \frac{1}{2} \sigma^0, \quad (194 \text{ a})$$

$$\sigma^0 = \frac{2\pi}{3\mu^2} \beta_1^2 \left(\frac{k}{mc} \right)^3 \frac{\hbar \omega}{mc^2} \frac{1}{(1 - E/E_R)^2 + \varrho^2}. \quad (194 \text{ b})$$

Identifiziert man für $\hbar \omega \approx mc^2$ (194 a) mit (182) und (194 b) mit (183'), so folgt für die phänomenologischen Konstanten α_1 und β_1 :

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{3}\pi} \cdot \frac{\varepsilon g}{\hbar c}, \quad \beta_1 = \frac{\sqrt{6}}{4} \alpha_1 \frac{m}{M} \mu_p. \quad (195)$$

(194) und (195) geben daher:

$$\sigma^{\pm} = \frac{4\pi}{\mu^2} \left(\frac{\varepsilon g}{4\pi \hbar c} \right)^2 \frac{\hbar c}{\hbar \omega} + \frac{1}{2} \sigma^0, \quad (194 \text{ a'})$$

$$\sigma^0 = \frac{4\pi}{3\mu^2} \left(\frac{\varepsilon g}{4\pi \hbar c} \cdot \frac{m}{M} \right)^2 \mu_p^2 \left(\frac{\hbar}{mc} \right)^3 \frac{\hbar \omega}{m c^2} \cdot \frac{1}{(1 - E/E_R)^2 + \varrho^2}. \quad (194 \text{ b'})$$

Dabei ist

$$\hbar^2 = k_{SS}^2 = (2M\hbar\omega + m^2c^2)^2/4(M^2c^2 + 2M\hbar\omega) - (mc)^2.$$

Aus $\sigma^+ (\hbar\omega = 255 \text{ MeV}) = 0,19 \text{ mb}$ folgt mit (194):

$$g^2/4\pi\hbar c = 0,17.$$

Die Übereinstimmung mit dem Experiment ist befriedigend. Also auch die Photomesonenerzeugung gibt zur Annahme eines isobaren Zustandes mit $i' = j' = 3/2$ Anlaß.

Literatur.

1. R. E. MARSHAK, Rev. Mod. Phys. **23**, 137, 1951; Meson Physics, Mc Graw Hill Book Comp. 1952.
2. G. LÜDERS, R. ÖHME und W. E. THIRRING, ZS. f. Naturf., **7 a**, 213, 1952.
3. R. G. MOURHOUSE, Adv. i. Phys. **2**, 6, 185, 1953.
4. S. FLÜGGE, Erg. d. exakt. Naturwiss. XXVI, 165, 1952.
5. J. C. GUNN, Adv. i. Phys. **2**, 6, 213, 1953.
6. G. WENTZEL, Quantentheorie d. Wellenf., Deuticke 1943, S. 29 ff.
7. G. BREIT, Phys. Rev. **55**, 1103, 1939.
8. H. A. BETHE, Phys. Rev. **76**, 38, 1949.
9. J. SCHWINGER, **78**, 135, 1950.
10. E. E. SALPETER, Phys. Rev. **91**, 994, 1953.
11. D. FELDMAN, Phys. Rev. **89**, 1159, 1953.
12. K. W. H. PANOFSKY und F. L. FILLMORE, Phys. Rev. **79**, 57, 1950.
13. B. CORK, L. JOHNSTON und C. RICHMAN, Phys. Rev. **79**, 71, 1950.
14. O. CHAMBERLAIN und C. WIEGAND, Phys. Rev. **79**, 81, 1950.
15. O. CHAMBERLAIN, E. SEGRE und C. WIEGAND, Phys. Rev. **83**, 923, 1951.
16. C. L. OXLEY und R. D. SCHAMBERGER, Phys. Rev. **85**, 416, 1952.
17. O. A. TOWLER, Phys. Rev. **85**, 1024, 1952.
18. J. M. CASSELS, T. G. PICKAVANCE und G. H. STAFFORD, Proc. Roy. Soc. A **214**, 262, 1952.
19. K. M. WATSON und K. A. BRUECKNER, Phys. Rev. **83**, 1, 1951.
20. R. H. HILDEBRAND, Phys. Rev. **89**, 1090, 1953.
21. H. W. WILSON und W. H. BARKAS, Phys. Rev. **89**, 758, 1953.
22. S. PASSMAN, M. M. BLOCK und W. W. HAVENS, Phys. Rev. **85**, 718, 1953.
23. W. HEITLER, Proc. Roy. Soc. **51**, 33, 1946.
24. K. M. WATSON, Phys. Rev. **85**, 852, 1952.
25. R. L. GARWIN, Phys. Rev. **85**, 1045, 1952.
26. A. M. L. MESSIAH, Phys. Rev. **86**, 430, 1952.
27. M. RUDERMAN, Phys. Rev. **87**, 383, 1952.
28. J. M. LUTTINGER, Phys. Rev. **86**, 571, 1952.
29. L. VAN HOVE, R. MARSHAK und A. PAIS, Phys. Rev. **88**, 1211, 1952.

30. E. U. CONDON und G. SHORTLEY, Theory of Atomic Spectra, 1935.
31. P. I. DEE und C. W. GILBERT, Proc. Roy. Soc. A **163**, 265, 1937.
32. P. G. KRUGER, W. E. SHOUPP und F. W. STALLMANN, Phys. Rev. **52**, 678, 1937.
33. T. W. BONNER, Phys. Rev. **52**, 685, 1937.
34. F. C. CHAMPION und C. F. POWELL, Proc. Roy. Soc. **183**, 64, 1944.
35. J. S. LAUGHLIN und P. G. KRUGER, Phys. Rev. **73**, 197, 1948.
36. F. L. YOST, J. A. WHEELER und G. BREIT **49**, 174, 1936.
37. J. SCHWINGER, Phys. Rev. **72**, 724, 1947.
38. G. F. CHEW und M. L. GOLDBERGER, Phys. Rev. **75**, 1637, 1949.
39. R. S. CHRISTIAN, Phys. Rev. **75**, 1675, 1949.
40. J. M. BLATT und J. D. JACKSON, Phys. Rev. **76**, 18, 1949; Rev. Mod. Phys. **22**, 77, 1950.
41. E. FERMI und L. MARSHALL, Phys. Rev. **71**, 66, 1947.
42. M. BLATT, Phys. Rev. **74**, 92, 1948.
43. R. B. SUTTON et al. Phys. Rev. **72**, 1147, 1947.
44. D. L. HUGHES, G. R. RINGO und M. T. BURG, Phys. Rev. **77**, 291, 1950 und Phys. Rev. **79**, 227, 1950.
45. G. R. RINGO und M. T. BURG, Phys. Rev. **82**, 344, 1951.
46. W. B. JONES, Phys. Rev. **74**, 364, 1948.
47. E. MELKONIAN, L. J. RAINWATER und W. W. HAVENS, Phys. Rev. **75**, 1295, 1949.
48. E. MELKONIAN, Phys. Rev. **76**, 1744, 1949.
49. C. G. SHULL et al., Phys. Rev. **73**, 842, 1948.
50. R. E. BELL und L. G. ELLIOT, Phys. Rev. **79**, 282, 1950; **74**, 1552, 1948.
51. W. E. STEPHENS, Rev. Mod. Phys. **19**, 19, 1947; Phys. Rev. **76**, 181, 1949.
52. A. V. TOLLESTRUP, Phys. Rev. **75**, 1947, 1949.
53. E. E. SALPETER, Phys. Rev. **82**, 60, 1951.
54. E. E. LAMPI, G. D. FREIER und J. H. WILLIAMS, Phys. Rev. **80**, 853, 1950.
55. C. L. BAILEY, Phys. Rev. **70**, 583, 1946.
56. H. A. BETHE und C. LONGMIRE, Phys. Rev. **77**, 647, 1950.
57. J. M. BLATT und V. F. WEISSKOPF, Theoretical Nuclear Physics, New York 1952, S. 105.
58. H. A. BETHE, Phys. Rev. **76**, 191, 1949.
59. K. M. WATSON und J. V. LEPORE, Phys. Rev. **76**, 1157, 1949.
60. Y. NAMBU, Prog. Theor. Phys. Jap. **5**, 614, 1950.
61. M. TAKETAMI, S. MACHIDA und S. ONUMA, Prog. Theor. Phys. Jap. **6**, 638, 1951.
62. K. NISHIJIMA, Prog. Theor. Phys. Jap. **6**, 815 und 911, 1951.
63. G. WENTZEL, Phys. Rev. **86**, 802, 1952.
64. K. NAKABAYASI und I. SATO, Phys. Rev. **88**, 144, 1952.
65. M. M. LEVY, Phys. Rev. **88**, 725, 1952.
66. I. TAMM, J. Phys. USSR. **9**, 449, 1945.
67. S. M. DANCOFF, Phys. Rev. **78**, 382, 1950.
68. M. M. LEVY, Phys. Rev. **88**, 72, 1952.
69. F. J. DYSON, Phys. Rev. **90**, 994, 1953.
70. F. J. DYSON, Phys. Rev. **73**, 929, 1948.
71. K. M. CASE, Phys. Rev. **76**, 14, 1949.
72. J. V. LEPORE, Phys. Rev. **87**, 209, 1952.
73. A. KLEIN, Phys. Rev. **89**, 1158, 1953; **90**, 1101, 1953.
74. A. KLEIN, Phys. Rev. **91**, 740, 1953.
75. A. MARTIN und L. VERLET, Phys. Rev. **89**, 519, 1953.

124. O. CHAMBERLAIN et al., Phys. Rev. **81**, 284, 1951.
125. C. L. OXLEY, Phys. Rev. **82**, 295, 1951.
126. O. CHAMBERLAIN et al., Phys. Rev. **83**, 218, 1951.
127. R. W. BIRGE, Phys. Rev. **83**, 274, 1951.
128. F. L. FILLMORE, Phys. Rev. **83**, 1252, 1951.
129. O. A. TOWLER, Phys. Rev. **84**, 1262, 1951.
130. A. E. CLARK et al., Bull. Am. Phys. Soc. **28**, 3, 43, 1953.
131. J. MARSHALL, L. MARSHALL und A. V. NEDZEL, Phys. Rev. **91**, 767, 1953.
132. W. E. MOTT et al., Phys. Rev. **90**, 712, 1953.
133. R. S. CHRISTIAN und H. P. NOYES, Phys. Rev. **79**, 85, 1950.
134. K. M. CASE und A. PAIS, Rev. **80**, 203, 1950.
135. R. JASTROW, Phys. Rev. **79**, 389, 1950.
136. E. C. FOWLER et al., Phys. Rev. **86**, 1053, 1952.
137. H. L. ANDERSON et al., Phys. Rev. **86**, 793, 1952.
138. H. L. ANDERSON et al., Phys. Rev. **85**, 934, 1952.
139. H. L. ANDERSON et al., Phys. Rev. **85**, 936, 1952.
140. G. GOLDBABER und L. LEDERMAN, Bull. Am. Phys. Soc. **28**, 1, 14, 1953.
141. C. CHEDESTER et al., Phys. Rev. **82**, 958, 1951.
142. E. FERMI et al., Phys. Rev. **85**, 935, 1952.
143. P. ISAACS, A. SACHS und J. STEINBERGER, Phys. Rev. **85**, 718 und 803, 1953.
144. S. W. BARNES et al., Phys. Rev. **87**, 669, 1952.
145. D. E. NAGLE et al., Phys. Rev. **86**, 603, 1953.
146. D. BODANSKY, A. SACHS und J. STEINBERGER, Phys. Rev. **90**, 996, 1953.
147. A. ROBERTS und J. TINLOT, Phys. Rev. **90**, 951, 1953.
148. C. L. ANGELL und J. PERRY, Phys. Rev. **90**, 724, 1953.
149. J. P. PERRY und C. E. ANGELL, Phys. Rev. **91**, 1289, 1953.
150. J. ASHKIN, A. SIMON und R. MARSHAK, Progr. Theor. Phys. Jap. **5**, 634, 1950.
151. G. CHEW, Phys. Rev. **89**, 591, 1953.
152. J. JEAN und J. PRENTKI, Compt. rend. **230**, 365, 1950.
153. M. PESKIN, Phys. Rev. **81**, 425, 1951.
154. M. CINI und L. RADICATI, Nouvo cim. **7**, 317, 1951.
155. K. A. BRUECKNER, Phys. Rev. **86**, 106, 1952.
156. Y. NAMBU und Y. YAMAGUCHI, Progr. Theor. Phys. **6**, 1000, 1951.
157. C. L. CRITCHFIELD und D. C. DODDER, Phys. Rev. **76**, 602, 1952.
158. J. ASHKIN und S. H. VOSKO, Phys. Rev. **91**, 1248, 1953.
159. D. BODANSKY, A. SACHS und J. STEINBERGER, Phys. Rev. **90**, 997, 1953.
160. H. A. BETHE, Phys. Rev. **90**, 994, 1953.
161. H. BYFIELD, J. KESSLER und L. M. LEDERMAN, Phys. Rev. **86**, 17, 1952.
162. D. C. PEASLEE, Phys. Rev. **87**, 862, 1952.
163. W. PAULI und S. M. DANCOFF, Phys. Rev. **62**, 85, 1942.
164. W. PAULI, Meson Theory, Interscience Publishers, 1946.
165. D. FELDMAN, Phys. Rev. **88**, 890, 1952.
166. H. FESHACH, D. C. PEASLEE und V. F. WEISSKOPF, Phys. Rev. **71**, 145, 1947.
167. K. A. BRUECKNER, Phys. Rev. **87**, 1026, 1952.
168. R. E. MARSHAK, Phys. Rev. **88**, 1208, 1952.
169. S. D. DRELL und E. M. HENLEY, Phys. Rev. **88**, 1053, 1952.
170. S. FUBINI, Nouvo cim. X, 564 und 851, 1953.
171. F. J. DYSON et al., Bull. Am. Phys. Soc. **28**, 1, 43, 1953.
172. V. PETERSON, E. ILOFF und D. SHERMAN, Phys. Rev. **81**, 647, 1951 und **84**, 372, 1951.

173. W. WHITEHEAD und C. RICHMAN, Phys. Rev. **83**, 855, 1951.
174. W. F. CARTWRIGHT et al., Phys. Rev. **78**, 823, 1950 und **81**, 652, 1951.
175. V. Z. PETERSON, Phys. Rev. **79**, 407, 1950.
176. S. PASSMAN, M. M. BLOCK und W. W. HAVENS, Phys. Rev. **86**, 602, 1952.
177. A. G. SCHULZ et al., Phys. Rev. **87**, 219, 1952.
178. S. PASSMAN, M. M. BLOCK und W. W. HAVENS, Phys. Rev. **88**, 1239 und 1247, 1952.
179. J. MARSHALL et al., Phys. Rev. **88**, 632, 1952.
180. W. F. CARTWRIGHT et al., Phys. Rev. **91**, 677, 1953.
181. R. DURBIN, H. LOAR und J. STEINBERGER, Phys. Rev. **84**, 581, 1951.
182. C. MORETTE, Phys. Rev. **76**, 1432, 1949.
183. E. FERMI, Elementary Particles, Yale University Press, 1951.
184. K. A. BRUECKNER und K. M. WATSON, Phys. Rev. **86**, 923, 1952.
185. S. MATSUYAMA und H. MIYAZAWA, Progr. Theor. Phys. Jap. **8**, 140, 1952.
186. N. KNABLE, U.C.R.L. 1444.
187. R. W. HALES et al., Phys. Rev. **85**, 377, 1952.
188. F. S. CRAWFORD, K. M. CROWE und M. L. STEVENSON, Phys. Rev. **82**, 97, 1951.
189. E. McMILLAN, J. M. PETERSON und R. S. WHITE, Science **110**, 579, 1949.
190. J. STEINBERGER und A. BISHOP, Phys. Rev. **78**, 494, 1950.
191. A. S. BISHOP, J. STEINBERGER und L. J. COOK, Phys. Rev. **80**, 291, 1950.
192. R. F. BACHER et al., Bull. Am. Phys. Soc. **28**, 5, 18, 1953.
193. R. S. WHITE, M. J. JACOBSON und A. G. SCHULZ, Phys. Rev. **88**, 836, 1952.
194. N. JARMIE, G. W. REPP und R. S. WHITE, Phys. Rev. **91**, 1023, 1953.
195. J. STEINBERGER und A. BISHOP, Phys. Rev. **86**, 171, 1952.
196. J. STEINBERGER, W. K. H. PANOFSKY und J. STELLER, Phys. Rev. **78**, 802, 1952.
197. A. SILVERMAN und M. STEARNS, Phys. Rev. **83**, 853, 1951; **88**, 1225, 1952.
198. R. L. WALKER, D. C. OAKLEY und A. V. TOLLESTRUP, Phys. Rev. **89**, 1301, 1953.
199. G. COCCONI und A. SILVERMAN, Bull. Am. Phys. Soc. **27**, 1, 27, 1952; Phys. Rev. **88**, 1230, 1952.
200. Y. GOLDSCHMIDT-CLERMONT, L. S. OSBORNE und M. B. SCOTT, Phys. Rev. **89**, 329, 1953.
201. L. L. FOLDY, Phys. Rev. **76**, 372, 1949.
202. G. ARAKI, Progr. Theor. Phys. Jap. **5**, 507, 1950.
203. P. BENOIST-GUENTAL, J. PRENTKI und J. RATIER, Compt. rend. **230**, 1146, 1950.
204. K. A. BRUECKNER, Phys. Rev. **79**, 641, 1950.
205. R. LITTAUER und D. WALKER, Phys. Rev. **82**, 746, 1951.
206. H. A. MEDICUS, Phys. Rev. **83**, 662, 1951.
207. M. F. KAPLON, Phys. Rev. **83**, 712, 1951.
208. K. AIZU, Y. FUJIMOTO und H. FUKUDA, Progr. Theor. Phys. **6**, 193, 1951.
209. B. T. FELD, Phys. Rev. **89**, 330, 1953.
210. D. R. HAMILTON, Phys. Rev. **58**, 122, 1940.

Eigendruckverbreiterung der inversen Zeemankomponenten der Natrium-*D*-Linien.

Von

Josef Tomiser.

Ausgeführt am Physikalischen Institut der Technischen Hochschule in Wien.

Mit 1 Tafel und 13 Abbildungen.

(Eingelangt am 9. November 1953.)

Inhalt.

Es wird die Eigendruckverbreiterung der inversen ZEEMAN-Komponenten der *D*-Linien quantitativ untersucht. Die Ergebnisse zeigen innerhalb des Druckbereiches von 0,032 bis 0,42 mm Hg eine lineare Verbreiterung der Halbwertsbreiten $\Delta \lambda$ in Abhängigkeit vom Sättigungsdruck p .

Einleitung.

Um den Einfluß des Na-Dampfdruckes auf die Linienbreite der noch nicht untersuchten inversen ZEEMAN-Komponenten der *D*-Linien quantitativ zu untersuchen, war es unerlässlich, eine möglichst genaue Temperaturbestimmung vorzunehmen. Diese Forderung ergibt sich aus dem Zusammenhang zwischen Dampfdruck und Temperatur, der z. B. aus der Dampfdruckformel von W. H. RODEBUSH und E. G. WALTERS¹

$$\log p = \frac{-5400}{T} + 7,5510$$

hervorgeht.

Eine direkte Temperaturmessung ist aber zwischen den Magnetpolen aus Raummangel mit der gewünschten Genauigkeit unmöglich. Aus diesem Grunde wurde eine indirekte Temperaturbestimmung, die die erforderliche Genauigkeit gewährleistete, durchgeführt. Die Einzelheiten dieser Temperaturbestimmung sind aus einer früheren Arbeit über die Eigendruckverbreiterung der Natrium-*D*-Linien [2] ersichtlich. In dieser Arbeit wurde die Abhängigkeit der Halbwertsbreite $\Delta \lambda$ von der Temperatur T , vom Dampfdruck p und von der Dampfdichte p/T bestimmt und die Ergebnisse in Kurvenform dargestellt.

Die Kurve, die den Zusammenhang zwischen $\Delta \lambda = f(T)$ wiedergibt, konnte nun in der vorliegenden Arbeit direkt als Eichkurve (Abb. 1) für die Temperaturbestimmung verwendet werden. Hiezu war es nur

nötig, daß bei gleichbleibender Untersuchungsanordnung und äußeren Bedingungen, eine Aufnahme der *D*-Linien ohne Feld gemacht wurde. Aus dem Mikrophotogramm derselben konnte die Halbwertsbreite $\Delta\lambda$ und mit dieser, aus der Eichkurve (Abb. 1), die zugehörige Temperatur bestimmt werden. Um die Genauigkeit zu erhöhen, wurde je eine Aufnahme ohne Feld vor und nach der ZEEMAN-Aufnahme gemacht und die Werte der Halbwertsbreiten gemittelt.

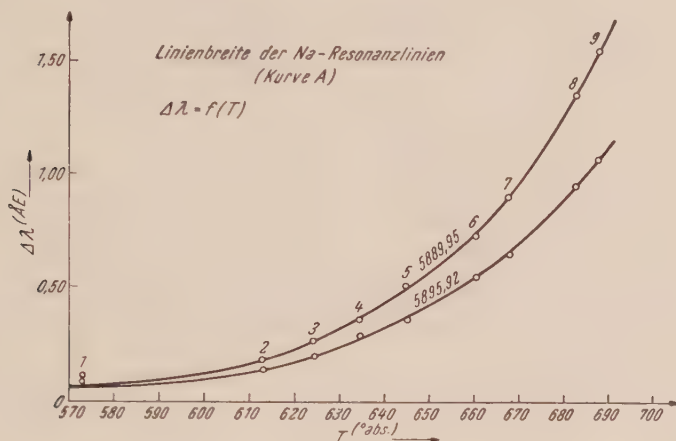


Abb. 1.

Experimenteller Teil.

Die Untersuchungsanordnung bestand im wesentlichen aus Lichtquelle, Magnet, Spektralapparat und Absorptionsrohr und ist in Abb. 2 schematisch dargestellt.

Der Spektralapparat.

Zur Verfügung stand ein 15-füßiges ROWLANDSches Konkavgitter der zweiten Auflage mit 15 000 Strichen pro inch. Die Dispersion betrug in der Nähe der Gitternormalen 1,83 Å/mm. Das Gitter wurde für die vorliegenden Untersuchungen neu justiert.

Der Magnet.

Für die Erzeugung der ZEEMAN-Aufspaltung gelangte ein Elektromagnet WEISSscher Bauart zur Verwendung. Er besitzt einen starken U-förmigen Eisenrahmen, der dem Magneten die nötige Starrheit gibt. Die Polkerne sind coaxial mittels Handrädern gegeneinander verschiebbar. Sie tragen jeder eine Spule mit 1075 Windungen eines 3 mm dicken Kupferdrahtes. Die Stromstärke bei Dauerbelastung im Sättigungsgebiet betrug 15 A. Die erzeugte Stromwärme wird durch eine Wasserkühlung abgeführt. Ein Gleichstromaggregat mit Röhrenregler lieferte

und regelte die für den Betrieb des Magneten benötigte konstante Spannung. Die Konstanz der Stromstärke ist durch die Temperaturänderung der Wicklung gefährdet. Durch die Einschaltung eines 5 Ohm-Widerstandes in den Magnetstromkreis zur Regulierung des Magnetisierungsstromes, wurde die geforderte Konstanz ohne große Schwierigkeiten erreicht.

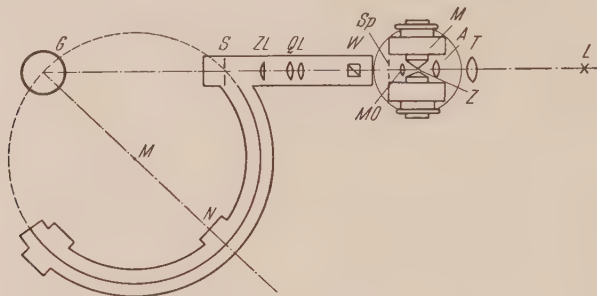


Abb. 2. Untersuchungsanordnung.

L = Lichtquelle T = Tessar, A = Achromat, Z = Absorptionszelle, M = Magnet, MO = Mikroskopobjektiv, Sp = horizontaler Spalt, W = Wollastonprisma, QL = Quarzlinse, ZL = Zylinderlinse, S = Spalt, G = Gitter, N = Gitternormale.

Die mittlere Feldstärke betrug bei der vorliegenden Versuchsreihe 29 500 Oersted und wurde nachträglich aus den Aufspaltungsbildern errechnet.

Die Lichtquelle.

Hiefür wurde eine Wolfram-Punktlichtlampe Type 2 G = 2 A und 55 Volt verwendet.

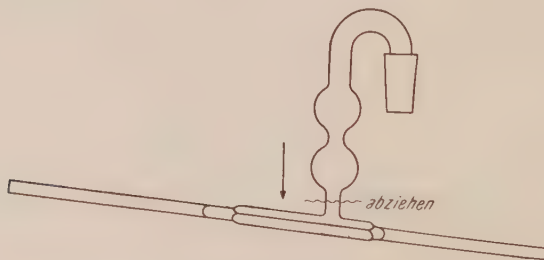


Abb. 3.

Die Absorptionszelle.

Da die Eigendruckverbreiterung untersucht werden sollte, mußten die Zellen so hoch evakuiert werden, daß eine Verfälschung der Resultate durch Fremdgasbeimischung nicht in Erscheinung treten konnte.

Die Zelle (Abb. 3) hatte an der durchleuchteten Stelle (Pfeil in Abb. 3) rechteckigen Querschnitt (4×5 mm) und war so lange, daß eine stabile Einspannung zwischen den Magnetenpolen möglich war.

Als Material diente Jenaer-Gerätéglass und für die Aufnahme bei höheren Temperaturen Duran- und Supremaxglas. Wegen der Verfärbung der Zellen durch das Natrium wurde eine Zelle meist nur für eine Aufnahme verwendet.

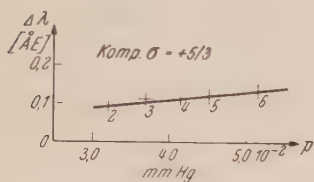


Abb. 4.

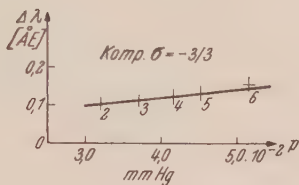


Abb. 5.

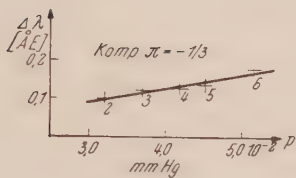


Abb. 6.

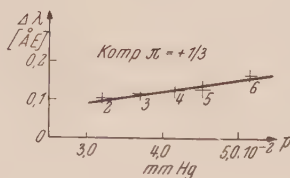


Abb. 7.

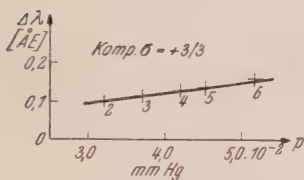


Abb. 8.

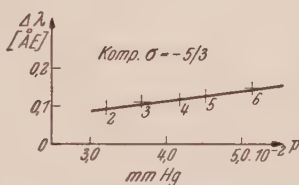


Abb. 9.

Abb. 4—9. Abhängigkeit der Halbwertsbreite $\Delta\lambda$ vom Druck p für die ZEEMANKomponenten der Natrium-Linien $\lambda = 5889,95$.

Das Füllen der Zellen erfolgte auf folgende Weise: Das Natrium wurde vom anhaftenden Petroleum mechanisch gereinigt und ein blanker Würfel von zirka 3 mm Kantenlänge herausgeschnitten. Dieser wurde nun in die oberste Kugel (Abb. 3) der Zelle gebracht. Während dem Evakuieren wurde das Natrium einige Minuten vorsichtig ausgeheizt und dann bei geschlossenem Haupthahn der Pumpe soweit erhitzt, daß das Natrium in die Zelle floß. Die hierbei eingetretene Verschlechterung des Vakuums wurde durch nochmaliges Auspumpen beseitigt und die Zelle konnte abgezogen werden.

Die fertige Zelle wurde mit einer Heizwicklung versehen und nur ein kleines Fenster für den Lichtdurchgang ausgespart. Gegen die Wärmeabstrahlung wurde die Zelle durch eine Asbesthülle geschützt.

Auswertung der Aufnahmen.

Die hergestellten Aufnahmen wurden alle mikrophotometriert (ZEISS'sches Mikrophotometer) und mit Hilfe der Schwärzungskurve aus dem Mikrophotogramm, nach dem schon früher beschriebenen Verfahren [2] die Halbwertsbreite bestimmt.

Die Schwärzungskurven wurden für jede Platte separat angelegt. Die hiezu nötigen Schwärzungsmarken lieferte eine Graukeilkopie.

Die ermittelten Halbwertsbreiten der unaufgespaltenen D -Linien ermöglichten nun aus der Eichkurve (Abb. 1), die zugehörigen absoluten Temperaturen abzulesen.

Diese dienten wieder zur Errechnung der Dampfdrücke aus der schon angegebenen Formel von W. H. RODEBUSH und E. G. WALTERS [1].

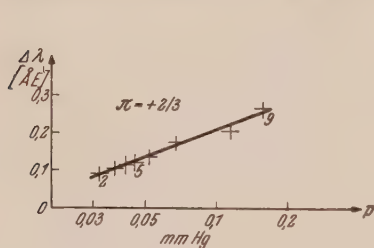


Abb. 10.

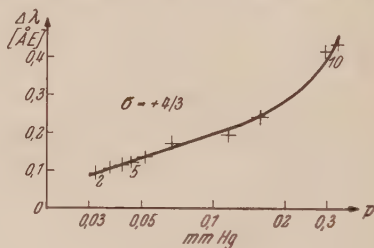


Abb. 11.

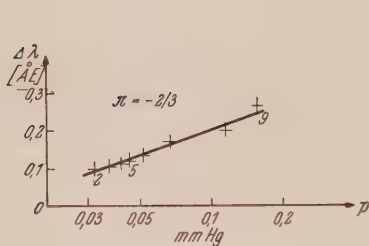


Abb. 12.

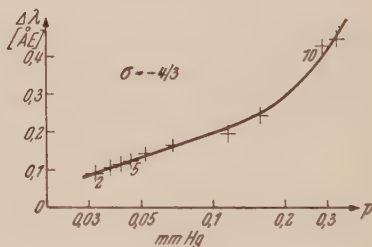


Abb. 13.

Akk. 10—13. Abhängigkeit der Halbwertsbreite $\Delta\lambda$ vom Druck p für die ZEEMANKomponenten der Natrium-Linie $\lambda = 5895,92$.

Ergebnisse.

Die Ergebnisse sind in der folgenden Tabelle, aus der die Einzelheiten der Auswertung hervorgehen, zusammengestellt.

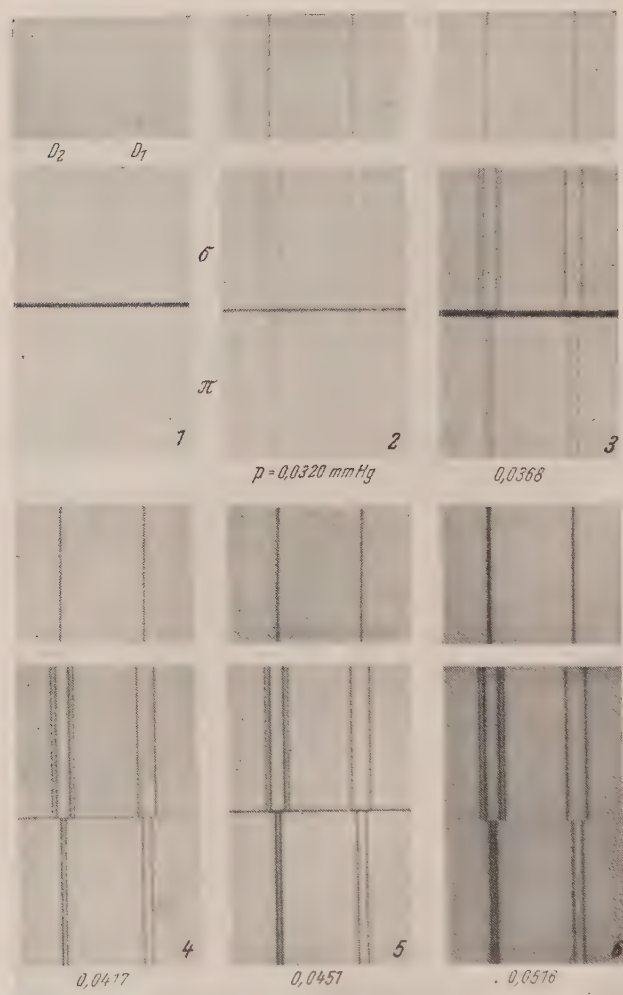
Die Bildertafel zeigt Vergrößerungen der ausgewerteten Aufnahmen und die Abbildungen 4 bis 13 geben die Eigendruckverbreiterung der ZEEMAN-Komponenten graphisch wieder.

Das Aufspaltungsbild ist bei sämtlichen Aufnahmen als regulär zu bezeichnen, nur übergreifen sich die ZEEMAN-Komponenten bei den höheren Drücken schon sehr stark.

Tabelle 1.

Aufnahme	Temperatur in $^{\circ}\text{K}$	Druck in mm Hg	Halbwertsbreiten in \AA E									
			ohne Magnetfeld		mit Magnetfeld							
			D_2	D_1	$D_2 - 5889,95 \text{ \AA}E$				$D_1 - 5895,92 \text{ \AA}E$			
1					$-\frac{5}{3}$	$-\frac{3}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{1}{3}$	$+\frac{3}{3}$	$+\frac{5}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$+\frac{4}{3}$
2	597	$3,2026 \cdot 10^{-2}$	0,103	0,083	0,095	0,102	0,100	0,105	0,103	0,097	0,092	0,094
3	601	$3,6810 \cdot 10^{-2}$	0,117	0,090	0,112	0,117	0,120	0,116	0,119	0,113	0,109	0,107
4	604	$4,1735 \cdot 10^{-2}$	0,124	0,100	0,119	0,124	0,124	0,123	0,127	0,117	0,117	0,115
5	606,5	$4,5165 \cdot 10^{-2}$	0,132	0,110	0,122	0,130	0,133	0,128	0,132	0,121	0,124	0,124
6	611	$5,1654 \cdot 10^{-2}$	0,156	0,125	0,149	0,159	0,177	0,168	0,160	0,147	0,145	0,139
7	619,5	$6,7190 \cdot 10^{-2}$	0,212	0,162							0,138	0,135
8	635,8	$1,1491 \cdot 10^{-1}$	0,372	0,290							0,173	0,172
9	647,5	$1,5970 \cdot 10^{-1}$	0,515	0,385							0,202	0,192
10	668	$2,9323 \cdot 10^{-1}$	0,892	0,645							0,267	0,256
11	674	$3,3450 \cdot 10^{-1}$	1,022	0,762							0,242	0,240
12	682	$4,2964 \cdot 10^{-1}$	1,315	0,935							0,428	0,414
											0,441	0,432

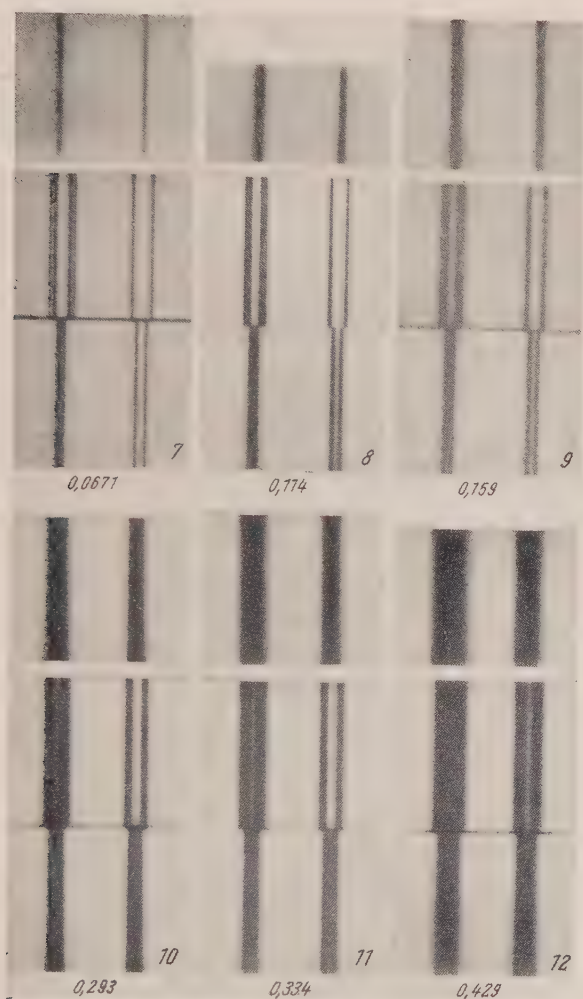
Wie aus der Tabelle ersichtlich ist, wurde die Aufnahme 1 zur Auswertung nicht herangezogen. Die Linien sind noch zu schwach und liefern keine genauen Halbwertsbreiten. Bei den Aufnahmen 2 bis 6



Tafel Ia.

konnten die $\Delta \lambda$ sämtlicher Komponenten ausgemessen werden, während bei den Aufnahmen 7, 8, 9 nur mehr die Komponenten der D_1 -Linie so weit getrennt waren, daß ihre Halbwertsbreite mit der gewünschten Genauigkeit bestimmt werden konnte. Die Aufnahmen 10 und 11

lieferten nur mehr die $\Delta\lambda$ der $4/3$ -Komponenten der D_1 -Linie. Aufnahme 12 zeigte schon so starke Verbreiterung, daß keine $\Delta\lambda$ angegeben sind.



Tafel I b.

Zusammenfassung.

Die Ergebnisse der vorliegenden Untersuchungen über die Eigendruckverbreiterung der ZEEMAN-Komponenten im Dampfdruckbereich von 0,032 bis 0,429 mm Hg zeigen, soweit sie ausgewertet werden

konnten, eine lineare Verbreiterung derselben. Nur bei den $4/3$ -Komponenten der D_1 -Linie ist gegenüber den $2/3$ -Komponenten eine Abweichung in der Verbreiterung festzustellen.

Literatur.

1. W. H. RODEBUSH u. E. G. WALTERS, Journ. Amer. Chem. Soc. **52**, S. 2654, 1930.
2. J. TOMISER, Eigendruckverbreiterung der Na-Resonanzlinien. Acta Phys. Austr. im Druck.

Empfindlichkeitsvergleich verschiedener Meßverfahren für Radiokohlenstoff.

Von

M. Reinharz, G. Rohringer und E. Broda.

II. Physikalisches Institut und I. Chemisches Laboratorium der Universität Wien.

(Eingelangt am 17. November 1953.)

Langlebiger Radiokohlenstoff ^{14}C ($\tau_{1/2} = 5590$ Jahre) hat in der letzten Zeit in mehreren Zweigen der Wissenschaft besondere Bedeutung erlangt [1]. Die empfindliche Messung des Kohlenstoffs bietet nun gewisse Probleme, da seine Betastrahlung besonders weich ist ($E_{\max} = 156 \text{ keV}$). So ist in den letzten Jahren eine geradezu verwirrende Fülle von Arbeiten über seine Messung erschienen. Es erscheint daher wünschenswert, die Vorzüge und Nachteile der verschiedenen Meßverfahren unter Verwendung einer eigens berechneten Tabelle übersichtlich zusammenzustellen.

Die Empfindlichkeit eines jeden Verfahrens kann auf Grund von zweierlei Kennzahlen vergleichend beurteilt werden: Entweder nach der kleinsten *spezifischen Aktivität* (Aktivität pro Masseneinheit Kohlenstoff) oder nach der kleinsten *Gesamtaktivität*, die noch gemessen werden kann. Für diese beiden Größen kann man zweckmäßig nach dem Vorbild der analytischen Chemie [2] die Bezeichnungen „Grenzaktivität“, bzw. „Erfassungsgrenze“ einführen. In der Tabelle sind die Verfahren im wesentlichen nach zunehmenden Werten der Grenzaktivität angeordnet.

Für den Zweck der Tabelle ist willkürlich als die kleinste noch erfaßbare Gesamtaktivität (Erfassungsgrenze) jene Aktivität definiert, die im gegebenen Gerät gerade einen dem Leerwert gleichkommenden Effekt gibt. (Natürlich lassen sich in Wirklichkeit bei entsprechender Ausdehnung der Meßdauer auch noch viel kleinere Aktivitäten gut messen [3, 4].)

Infolgedessen ergibt sich die Grenzaktivität G durch Division des Leerwertes L durch die Probenmasse M unter der Voraussetzung, daß die Ausbeute A der Messung 100% beträgt. Ist die Voraussetzung nicht erfüllt, so liegt die Grenzaktivität natürlich höher. Offenbar gilt $A \cdot M \cdot G = 100 L$.

Zu der Tabelle sind folgende Erläuterungen zu geben:

Die Meßgeräte nach Verfahren 1 und 2 werden zum Schutz gegen die kosmische Strahlung in Antikoinzidenz betrieben. Dadurch wird z. B.

Tabelle 1.

I Nr.	II Meßverfahren	III Autor	IV Chemische Form	V Berechnungs- grundlage (v = Vol. [cm ³] p = Druck [at.] c = Konz. [gcm ⁻³] f = Dicke [gcm ⁻²])	VI Substanz- menge (Mol Kohlen- stoff)	VII Leerwert ent- spricht Curie	VIII Meß- aus- beute (%)	IX Grenz- aktivität (Curie/ Mol)
1	Schirmgitter-Geiger-Zählrohr	LIBBY ³	C	$f = 8/400$	0,66	$2,3 \cdot 10^{12}$	5,5	$6,5 \cdot 10^{-11}$
2	Hochdruck-Proportionalzähler	CRATHORN ⁵	C ₂ H ₂	$v = 3000 \quad p = 1$	0,25	$1,4 \cdot 10^{11}$	75	$7,5 \cdot 10^{11}$
3	Hochdruck-Proportionalzähler	FALTINGS ⁶	C ₂ H ₆	$v = 500 \quad p = 2,7$	0,11	$5 \cdot 10^{-11}$	100?	$4,5 \cdot 10^{-10}$
4	Ionenkammer	HENRIQUES und MARGNETTI ⁷	CO ₂	$v = 220 \quad p = 2$	0,02	$5 \cdot 10^{-11}$	~100	$2,5 \cdot 10^9$
5	Photoplatte	REINHARZ und VANDERHAEGHE ⁸		$c = 2,4 \cdot 10^{-6}/3 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-7}$	10^{15}	~50	10^{-8}
6	Gas-Geiger-Zählrohr	ROHRINGER und BRODA ⁹	CO ₂	$v = 24 \quad p = 0,5$	$5 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-11}$	~100	$4 \cdot 10^{-8}$
7	Niederdruck-Proportionalzähler	BERNSTEIN und BALLENTEINE ¹⁰	CO ₂	$v = 100 \quad p = 0,15$	$5,5 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-11}$	~100	10^{-7}
8	Strömungs-Proportionalzähler (dünne Schicht)	typische Verahren: tliche Verfahren:		$f = 2,5 \cdot 10^{-3}/5$ (als C)	$2 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-12}$	33	$7,5 \cdot 10^8$
9	Strömungs-Proportionalzähler (dicke Schicht)		BaCO ₃	$f = 0,125/5$	$6 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-12}$	5,5	$1,5 \cdot 10^{-7}$
10	Fenster-Geiger-Zählrohr (dünne Schicht)			$f = 10^{-3}/2$ (als C)	$8 \cdot 10^{-5}$	10^{-11}	6	$2 \cdot 10^{-6}$
11	Fenster-Geiger-Zählrohr (dicke Schicht)		BaCO ₃	$f = 0,05/2$	$2,5 \cdot 10^{-4}$	10^{-11}	1	$4 \cdot 10^{-6}$

von LIBBY ein Faktor 20 sowohl in bezug auf die Erfassungsgrenze als auch die Grenzaktivität gewonnen. Eine ähnliche Antikoinzidenzschaltung ließe sich mit entsprechendem Vorteil auf die Verfahren 6 und 7 anwenden; bei Verfahren 8 bis 11 wäre Antikoinzidenz zwar auch möglich, aber kaum lohnend. Die *Erfassungsgrenze* ist natürlich nur vom Leerwert (Spalte VII) abhängig, also ausschließlich durch das Gerät bestimmt und von der Art der Füllung unabhängig.

Dagegen gilt die in Spalte IX angegebene *Grenzaktivität* nur dann, wenn die Probemasse den in Spalte VI angeführten Wert erreicht. Dieser Wert entspricht bei den Verfahren 1 bis 7, wo der Radiokohlenstoff in das Gerät eingeführt wird, der Aufnahmefähigkeit des Geräts. Steht jedoch weniger Substanz zur Verfügung, dann verlieren zwar von einem gewissen Punkt an alle Verfahren an absoluter Empfindlichkeit, aber es gewinnen im Verhältnis zueinander jene Verfahren an relativer Empfindlichkeit, bei denen die Ausbeute (Spalte VIII) den höheren Wert besitzt. So sind — immer in bezug auf die Grenzaktivität — die Verfahren 2, 3, 6 (also die Gaszählverfahren) dem Verfahren der Zählung fester Proben (Verfahren 1) überlegen, wenn die Probenmasse gerade zur Füllung der Gaszählgeräte ausreicht, vorausgesetzt, daß in allen Fällen Antikoinzidenz zur Verfügung steht.

Die Möglichkeiten zur Erhöhung der Empfindlichkeit der Proportionalzählung (Verfahren 2 und 3) sind gewiß noch nicht ausgeschöpft. Druckerhöhung und Übergang zu Gasen, die mehr als zwei Kohlenstoffatome im Molekül enthalten, werden die Empfindlichkeit weiter steigern lassen.

Das Verfahren 4 ist hinsichtlich der apparativen Erfordernisse umständlich. Andererseits bietet es keine besonderen Vorteile, da es gegenüber 2 und 3 bezüglich Empfindlichkeit, gegenüber 6 bezüglich Einfachheit der Messung unterlegen ist. Auch wirkt ungünstig, daß zur vollen Ausnützung des Gerätes im Vergleich zum Gas-GEIGER-Zählrohr Proben ganz beachtlicher Größe erforderlich sind. Das Gerät wird daher schwerlich in allgemeinen Gebrauch kommen. Auch Ionenkammern sind beschrieben worden, in die der Radiokohlenstoff als festes Bariumkarbonat eingeführt wird, doch weisen solche Geräte naturgemäß nur bescheidene Empfindlichkeit auf [11].

Das Verfahren 5 ist erst in neuester Zeit ausgearbeitet worden. Es beruht darauf, daß die aktive Kohlenstoffverbindung oder ihre Lösung in eine dünnwandige Glaskapillare eingefüllt und die Kapillare in elektronenempfindliche Emulsion, z. B. Ilford-G 5-Emulsion, eingebettet wird. Die Betastrahlen erzeugen Bahnsuren, die nach dem Entwickeln und Fixieren der Platte einzeln visuell ausgezählt werden. Man erkennt aus der Tabelle den außerordentlich niedrigen Leerwert, der eine ebenso niedrige Erfassungsgrenze bewirkt. Das Verfahren dürfte sich bei der Messung sehr kleiner Proben geringer spezifischer Aktivität bewähren. Solche Proben sind z. B. gewisse Einzelfraktionen aus tierischen oder pflanzlichen Organen geringer Masse. Die Kapillarenlänge kann beispielsweise 1 cm betragen.

Für empfindliche Reihenmessungen dürfte sich Verfahren 6 am besten eignen. Nach diesem Verfahren können unter Verwendung eines löschenden NEHER-PICKERING-Kreises in unserem Laboratorium zwanzig und mehr Proben im Tag gemessen werden. Die Konstanzbereiche sind angezeichnet. Sie betragen in der Regel 400 Volt und haben keine merkliche Steigung. Die große Zeitkonstante ist bei der Messung schwacher Proben kein Nachteil. Gas-GEIGER-Zählrohre für Kohlen-säure waren zwar schon früher beschrieben worden [12], doch war es noch nie gelungen, sie ohne Zusatz eines Fremdgases zu betreiben. Es hat sich im Betrieb unserer Zählrohre gezeigt, daß sie gegen Anwesenheit von Wasser- oder Quecksilberdampf wenig empfindlich sind.

Die Verfahren 8 bis 11 sind für Reihenmessungen üblich, bei denen es nicht auf besondere Empfindlichkeit ankommt. Diese Verfahren werden natürlich wegen ihrer Einfachheit und Schnelligkeit ihre Stellung in ihrem Bereich behaupten.

Szintillationszähler [13] sind nicht in die Tabelle aufgenommen, da sie bisher stets an sehr hohen Leerwerten kranken. Doch wird neuerdings der Leerwert insbesondere durch geeignete Impulsdiskriminierung und durch Verwendung von Koinzidenzschaltungen stark herabgedrückt. Es sind in dieser Richtung weitere Fortschritte zu erwarten.

Literatur.

1. M. CALVIN, C. HEIDELBERGER, J. C. REID, B. TOLBERT und P. F. YANKWICH, *Isotopic Carbon*, New York (1948); E. BRODA und T. SCHÖNFELD, *Österr. Chem. Ztg.* **54**, 209 (1953).
2. Siehe F. FEIGL, *Qualitative Analyse*, Leipzig (1931).
3. W. F. LIBBY, *Radiocarbon Dating*, Chicago (1952).
4. E. BRODA und G. ROHRINGER, *Naturwiss.* **40**, 337 (1953).
5. A. R. CRATHORN, *Nature* **172**, 632 (1953).
6. V. FALTINGS, *Naturwiss.* **39**, 378 (1952).
7. F. C. HENRIQUES und C. MARGNETTI, *Anal. Chem.* **18**, 417 (1946); siehe auch C. D. JANNEY und B. J. MOYER, *Rev. Sci. Instr.* **19**, 667 (1948) sowie G. L. BROWNELL und H. S. LOCKHART, *Nucleonics* **10/2**, 26 (1952).
8. M. REINHARZ und G. VANDERHAEGHE, *Nuovo Cimento* (1954), im Druck.
9. G. ROHRINGER und E. BRODA, *Z. Naturforsch.* **8 b**, 159 (1953).
10. W. BERNSTEIN und R. BALLENTINE, *Rev. Sci. Instr.* **21**, 158 (1950).
11. J. D. ROBERTS, W. BENNETT, E. W. HOLROYD und C. H. FUGITT, *Anal. Chem.* **20**, 904 (1948).
12. S. C. BROWN und W. W. MILLER, *Rev. Sci. Instr.* **18**, 496 (1947); M. L. EIDINOFF, *Anal. Chem.* **23**, 632 (1951); O. FELDSTEIN und E. BRODA, *Nature* **168**, 599 (1951).
13. M. S. RABEN und N. BLOEMBERGEN, *Science* **114**, 363 (1951); F. N. HAYES, R. D. HIEBERT und R. L. SCHUCH, *Science* **116**, 140 (1952); W. HANLE, K. HENGST und H. SCHNEIDER, *Z. Naturforsch.* **7 b**, 633 (1952); B. N. AUDRIC und J. V. P. LONG, *Research* **5**, 47 (1952); E. C. FARMER und I. A. BERSTEIN, *Science* **115**, 460 (1952).

Die Wellengleichungen der Quantenelektrodynamik.

Von

Ernst Freese.

Aus dem MAX PLANCK-Institut für Physik, Göttingen.

(Eingelangt am 18. November 1953.)

Wirkungsquerschnitte und Bindungsenergien lassen sich aus einer relativistisch invariant geschriebenen Quantenfeldtheorie mit Hilfe von Differentialgleichungen bzw. Integralgleichungen für „Wellenfunktionen“ berechnen. Diese allgemeine Methode wird in der vorliegenden Arbeit auf die einfachsten Probleme der Quantenelektrodynamik angewandt. Die Ergebnisse sind im wesentlichen nicht neu, aber man sieht, daß alle experimentellen Größen konsequent aus einem Formalismus abgeleitet werden können.

In den bisherigen Quantenfeldtheorien geht man von zwei (oder mehr) Ausgangsfeldern aus, die zu „freien Teilchen“ bestimmter Masse und bestimmten Spins gehören und untersucht ihre Wechselwirkung. Für freie Teilchen, die sich aufeinander zu bewegen, beschreibt diese Wechselwirkung die Kraftwirkung zwischen den Teilchen; sie erklärt ihre Streuung und ermöglicht die Erzeugung neuer sowie den Übergang in gebundene Teilchen. Die Ruheenergien der gebundenen Teilchen selbst werden als Eigenwerte aus der Theorie erhalten. Dabei ist jede solche Ruheenergie ungefähr gleich der Summe der Ruheenergien einer bestimmten Menge freier Teilchen, falls die Wechselwirkung klein oder mittelstark ist: In erster Näherung ist das gebundene Teilchen aus diesen Ausgangsteilchen zusammengesetzt.

Wie ist es möglich, alle beobachtbaren Größen für gebundene Teilchen und Streuprozesse aus der Theorie zu berechnen? Als Antwort auf diese Frage wurde in einer anderen Arbeit¹ gezeigt, daß alle physikalischen Fragestellungen durch Lösung eines unendlichen Systems von Differentialgleichungen (DGen), bzw. Integralgleichungen (IGen) für neu eingeführte „Wellenfunktionen“ beantwortet werden können. Zum näheren Verständnis sollen im folgenden einige einfache Beispiele aus der Quantenelektrodynamik gegeben werden. Die Übertragung auf eine andere Quantenfeldtheorie und die Erweiterung auf kompliziertere Probleme ist dann klar.

¹ Gebundene Teilchen und Streu-Probleme in der Quantenfeldtheorie. Zeitschr. f. Naturforschung 8a, 776 [1953]. Diese Arbeit wird im folgenden als bekannt vorausgesetzt und mit FI bezeichnet.

Hier eine Übersicht über das Folgende:

Nach einer Zusammenstellung der Ausgangsgleichungen in Kap. I, werden in II die einfachsten IGen, bzw. Integro-DGen eines Elektrons und eines Lichtquants im äußeren Feld abgeleitet und auf die Berechnung von Grund- und angeregten Zuständen, Zerfalls- und Übergangswahrscheinlichkeiten angewandt. In III steht die einfachste IG für das Positronium und in IV werden die totalen Wahrscheinlichkeiten für die Ausstrahlung von Lichtquanten durch einen fest vorgegebenen äußeren Strom berechnet. — Anhang I enthält eine Zusammenstellung der verwendeten Bezeichnungen und Δ -, S-Funktionen, Anhang II Angaben über die Ableitung der DGen von τ - und σ -Funktionen.

I. Die Ausgangsgleichungen.

Die Ausgangsgleichungen für die Feldoperatoren heißen:

$$\left. \begin{aligned} (\mathbf{p}_x - e \mathbf{A}^e(x) - m) \psi_H(x) &= + e \gamma_\nu A_H^\nu(x) \psi_H(x) \\ (\mathbf{p}_x - e \mathbf{A}^e(x) - m) \psi'_H(x) &= - e \gamma_\nu A_H^\nu(x) \psi'_H(x) \\ \square_x A_H^\nu(x) &= e S \dot{p} \{ C^* \gamma^\nu T \psi(x) \psi'(x) \} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ψ = Operator des Elektronenfeldes,
 $\psi' = C \bar{\psi}^T$ = Operator des Positronenfeldes ²
 A = Operator des Lichtquantenfeldes.

Das Wicksche T -Produkt³ von Operatoren mit gleichen Zeiten soll durch das arithmetische Mittel der verschiedenen möglichen Grenzübergänge definiert sein. Praktisch genügt es für uns, den Wert eines T -Produkts dann zu kennen, wenn nur zwei Operatoren die gleichen Koordinaten haben, wie in der DG oben. Sonst wird nämlich in den IGen über alle Koordinaten des T -Produkts integriert: Der Wert eines Integrals über eine Funktion mit Sprungstellen ist unabhängig von den Funktionswerten in den Sprungstellen selbst.

Die Wellenfunktionen sind wie in FI gegeben durch:

$$\varphi(x_1 \dots x_e | y_1 \dots y_m | z_1 \dots z_n) = (l! m! n!)^{-1/2} \sigma(x_1 \dots x_e | y_1 \dots y_m | z_1 \dots z_n)$$

wobei σ das Matrixelement des S-Produkts von HEISENBERG-Operatoren ist. Die Berechnung der DGen erfolgt wie in FI auf dem Umweg über die T -Produkte; sie haben hier die gleiche Gestalt, nur muß bei Differentiation nach der Koordinate

y ersetzt werden: γ_5' durch $+e\gamma_\nu$,
 z ersetzt werden: γ_5' durch $-e\gamma_\nu$,
 x ersetzt werden: $-\gamma_5'$ durch $+e\gamma^\nu$.

² PAIS und JOST.

³ G. C. WICK, Phys. Rev. 80, 268 (1950).

II. Die einfachsten Integro-Differentialgleichungen eines Elektrons und eines Lichtquants im äußeren Feld.

Wir wollen die Bewegung eines Elektrons in einem vorgegebenen zeitlich konstanten äußeren Feld $A^\epsilon(x)$ (im allgemeinen dem COULOMB-Feld eines Atomkerns) untersuchen. Dazu berücksichtigen wir die Wechselwirkung zwischen Elektron- und Lichtquantenfeld nur näherungsweise, indem wir alle Wellenfunktionen mit mehr als einer Elektronen- und einer Lichtquantenkoordinate fortlassen. Wir werden nachher sehen, daß dies einer Entwicklung nach der Kopplungskonstanten gleichkommt. Je nach den verschiedenen physikalischen Anfangsbedingungen können wir dann folgende drei Fälle unterscheiden:

1. Ein einlaufendes Elektron, kein Lichtquant: Die Streuung eines Elektrons am äußeren Feld unter Einschluß der Lichtquantenerzeugung und des Einfangs.

2. Ein gebundenes Elektron, kein einlaufendes Lichtquant: Die Berechnung der Energieniveaus, Zerfallskonstanten und Übergangswahrscheinlichkeiten von Grund- und angeregten Zuständen.

3. Ein gebundenes Elektron und ein einlaufendes Lichtquant: Anregung und Ionisation des gebundenen Elektrons.

1. Ein einlaufendes Elektron, kein Lichtquant.

Die IGen für die beiden ersten Wellenfunktionen heißen:

$$\sigma(|y|) = \chi(y) + e \int S_+^\epsilon(y, y') \gamma_\nu \sigma(y'' | y') d^4 y' \quad (2)$$

Die Vektorindizes (ν), die oben rechts an den Koordinaten der Wellenfunktionen stehen, sollen die Indizes der entsprechenden Lichtquantenoperatoren angeben.

Für die nächste Wellenfunktion gibt es bezüglich jeder Koordinate eine IG:

$$\begin{aligned} \sigma(x^\nu | y) &= \sigma_0(x^\nu ||) \chi(y) + e \int S_+^\epsilon(y, y') \gamma_\mu \{ \sigma(x^\nu y'^\mu | y') - \\ &\quad - i D_+^{\nu\mu}(x - y') \sigma(|y'|) \} d^4 y' \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} &= \mathfrak{A}^\nu(x) \sigma_0(|y|) - e \int D_+(x - x') \{ C^* \gamma^\nu \sigma(|y x'| x') - \\ &\quad - i S_+^\epsilon(y, x') \gamma^\nu \sigma(|x'|) + i \gamma^\nu S_+^\epsilon(x', x') \sigma(|y|) \} d^4 x' \end{aligned} \quad (4)$$

Hierbei ist:

$$\sigma_0(x^\nu ||) = (\psi_H^0, A_H^\nu(x) \psi_H^0) = 0$$

Die Eichung für das Lichtquantenfeld kann so gewählt werden.

$$D_+^{\nu\mu}(x) = -g^{\nu\mu} D_+(x) \quad \text{mit} \quad g^{\nu\mu} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$$

$\mathfrak{A}''(x) = 0$, denn es wurde vorausgesetzt, daß nur ein Elektron aber kein Lichtquant von $t = -\infty$ einlaufen soll.

$C^* = C^{\dagger T}$ ist das konjugiert Komplexe der Matrix, die Teilchen- und Antiteilchen-Wellenfunktionen miteinander verknüpft². Es muß die Spur genommen werden über $C^* \gamma^\nu$ und die beiden Teilchen mit den Koordinaten x' .

Das letzte Glied der dritten IG gibt nur bei Anwesenheit eines äußeren Feldes einen Beitrag (Polarisation des Vakuums), denn das darin enthaltene $S_{x'x'}$ ist wegen der vorausgesetzten symmetrischen Definition des T -Produktes zu gleichen Zeiten gegeben durch:

$$S_+(x', x') = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \{S_+(\varepsilon, \vec{o}) + S_+(-\varepsilon, \vec{o})\}$$

Da man in der IG die Spur zu bilden hat für das Produkt von γ^ν und S_{xx} , erhält man ohne äußeres Feld

$$Sp \{ \gamma^\nu S^{(1)}(0) \} = \{ 4 i \partial_\nu D^{(1)}(x) \}_{x=0} = 0 \quad (5)$$

(s. SCHWINGER⁴).

Anders dagegen in einem äußeren Feld. Benutzt man z. B. als Näherung für S^e den durch einmalige Iteration aus der IG für S^e (s. Anhang I) erhaltenen Ausdruck:

$$S_+^e(x, x') = S_+(x - x') + e \int S_+(x - x'') A^e(x'') S_+(x'' - x') dx'' + \dots \quad (6)$$

so fällt das erste Glied nach dem Vorigen fort, und das zweite Glied gibt die übliche Näherung (SCHWINGER) zur Polarisation des Vakuums.

Als einfachste Näherung, in welcher alle in der Quantenelektrodynamik bisher beobachtbaren Einflüsse durch Strahlungskorrekturen enthalten sind, wird jeweils das erste Glied in den geschweiften Klammern von (3) und (4) (das heißt die Wellenfunktionen zu mehreren Teilchen) fortgelassen und das erhaltene System von gekoppelten IGen gelöst. Wäre eine solche Lösung exakt möglich, so würde sie die folgenden drei Prozesse beschreiben:

α) „Elastische“ Streuung des Elektrons am COULOMB-Potential (mit Berücksichtigung der Strahlungskorrekturen).

β) Streuung unter Aussendung eines Lichtquants (Bremsstrahlung).

γ) Einfang des Elektrons unter Aussendung eines Lichtquants.

Statt der beiden DGen (3) und (4) können wir auch eine einzige IG herstellen, die bei Differentiation nach x die DG bezüglich x , bei Differentiation nach y die DG bezüglich y und bei Differentiation nach x und y die entsprechende DG liefert. Diese IG folgt eindeutig aus den drei DGen, die man nach den Regeln von FI ohne weiteres hinschreiben

⁴ J. SCHWINGER, Phys. Rev. **75**, 651.

kann. Die allgemeine Form der IG ist kompliziert; wir geben nur die Näherung in e an, weil wir anschließend eine IG für $\sigma(|y|)$ herstellen wollen, die in der Näherung e^2 gültig ist.

$$\sigma(x''|y|) = \mathfrak{U}^*(x) \chi(y) + e \int D_+(x-x') \{i S_+^e(y, x') \gamma^\nu \sigma(|x'|) - \\ - S\bar{p}(\gamma^\nu S_+^e(x', x')) \sigma(|y|)\} d^4x' \quad (7)$$

Die Gleichung ist aber nicht gleichbedeutend mit den beiden Gln. (3) und (4) (in derselben Näherung e); denn diese beiden Gleichungen enthalten als inhomogenes Glied jeweils die Angabe, ob ein Elektron (in 3) oder ein Lichtquant (in 4) einläuft, während das inhomogene Glied in (7) nur dann ungleich Null ist, wenn sowohl ein Elektron wie ein Lichtquant einläuft, sonst aber immer Null: Die Gl. (7) wird besonders geeignet für die Behandlung der Streuung von Lichtquanten an freien Elektronen sein und für Probleme, die kein einlaufendes Lichtquant enthalten.

Läuft höchstens ein Elektron an das äußere Feld heran, so kann man auch für alle höheren Wellenfunktionen ähnlich wie eben eine einzige IG herstellen, deren inhomogenes Glied verschwindet*. Indem man diese IGen jeweils ineinander einsetzt und überall wo nötig nach $\sigma(|y|)$ iteriert, erhält man eine in beliebig vorgegebener Näherung der Kopplungskonstante gültige IG für $\sigma(|y|)$ allein. — Setzen wir z. B. (7) in (2) ein, so bekommen wir die in der Näherung e^2 gültige IG:

$$\varphi(|y|) = \chi(y) + e^2 \int dy' S_+^e(y, y') \gamma_\nu \left\{ \int S_+^e(y', y'') \gamma^\nu \varphi(|y''|) \right. \\ \left. i D_+(y' - y'') dy'' - \varphi(|y'|) \cdot \int i D_+(y' - x') S\bar{p}(\gamma^\nu S_+^e(x', x')) dx' \right\} \quad (8)$$

In Graphenform wird das durch die drei Glieder der Abb. 1a veranschaulicht:

Im Graphen 2 ist die Massenrenormierung, die LAMB-Verschiebung, und ein imaginäres Glied, welches den Zerfall eines gebundenen Teilchens berücksichtigt, enthalten. Die Schlangenlinien charakterisieren die Eigenfunktionen, bzw. S_+^e Funktionen bei exakter Berücksichtigung des äußeren Feldes. Die üblichen FEYNMANSchen Graphen werden daraus durch Entwicklung aller Funktionen nach dem äußeren Feld erhalten. Zum Beispiel zeigt die Abb. 1b die Entwicklung für das zweite Glied:

Der Graph 3 bedeutet ein additives Glied zum äußeren Feld (meist „Vakuumpolarisation“ genannt).

* Die allgemeine Formulierung hierfür ist inzwischen von P. T. MATTHEWS und A. SALAM (proc. royal soc. A **221**, 128 (1951)) angegeben worden.

Differenziert man die Gleichung einmal, so erhält man die Integro-DG⁵:

$$(\not{p}_y - e A^e(y) - m) \varphi(|y|) = e^2 \int \gamma_\nu S_+(y, y') \gamma^\nu i D_+(y - y') \varphi(|y'|) - \\ - e^2 \int \gamma_\nu S \{ \gamma^\nu S_+(x', x') \} i D_+(y - x') dx' \cdot \varphi(|y|) \quad (9)$$

Das ist die von KARPLUS und KLEIN⁶ zur Berechnung der LAMB-Verschiebung benutzte Gleichung. Das erste Glied der rechten Seite enthält eine unendliche Massenrenormierung, die hier einfach fortzulassen ist, da wir die Theorie als von vornherein renormiert ansehen wollen und nur der Einfachheit halber die zusätzlichen Glieder in der DG der Feldoperatoren fortgelassen haben. Das zweite Glied bedeutet eine durch „Vakuumpolarisation“ erzeugte Veränderung des äußeren Feldes. — Weiteres über diese Gleichung s. 2).

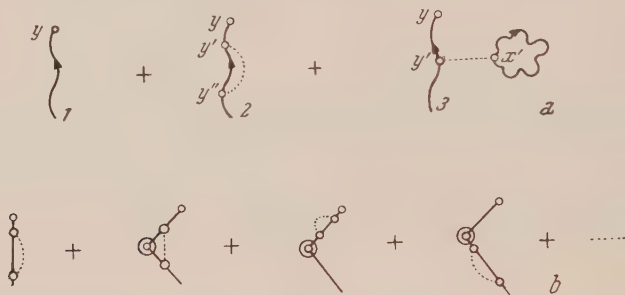


Abb. 1.

Die IG (8) für $\varphi(|y|)$ kann durch Iteration nach der einlaufenden Welle χ näherungsweise gelöst und damit der Wirkungsquerschnitt für Streuung berechnet werden. Durch Einsetzen dieser Näherung in die IG für $\sigma(x|y)$ läßt sich der Wirkungsquerschnitt für Bremsstrahlung bestimmen.

Es ist aber zu erwarten, daß immer, wenn der Übergang γ) von einem freien in ein gebundenes Teilchen überhaupt möglich ist, diese Entwicklung nach dem Kopplungsparameter e nicht konvergiert. (Da die zeitunabhängige Normierung einer einzelnen Wellenfunktion im allgemeinen nicht möglich ist, wird man den Begriff Konvergenz z. B. auf die Absolutquadrate von Übergangsamplituden beziehen, die durch Entwicklung nach der Kopplungskonstanten für einen vorgegebenen Endzustand näherungsweise berechnet werden.) — Diese Behauptung ist für ein Elektron im äußeren Feld schon in FI begründet worden. Dasselbe gilt auch für zwei Fermionen, welche sich durch elektromagnetische oder mesonische Kräfte anziehen, weil bereits in der ein-

⁵ J. SCHWINGER, Phys. Rev. **82**, 664 (1951).

⁶ R. KARPLUS und A. KLEIN, Phys. Rev. **85**, 972; **86**, 288; **87**, 248 (1952).

fachsten Näherung (COULOMB- oder YUKAWA-Potential) die Impulsraum-Wellenfunktion der gebundenen Teilchen die Kopplungskonstanten so im Nenner enthält, daß eine Entwicklung nach ihr zu nicht konvergenten Resultaten führt.

2. Ein gebundenes Elektron, kein einlaufendes Teilchen.

a) Stationärer (Grund-)Zustand.

Es gelten wieder die IGen von 1. nur ist jetzt $\chi(y)$ gleich Null, da keine einlaufende Welle vorhanden. Man kann die Energie E des gebundenen Elektrons als Eigenwert aus der IG (8), bzw. DG (9) ausrechnen, wenn man $\varphi(|y|) \sim e^{-iEt_y} \varphi(\vec{y})$ ansetzt (s. KARPLUS und KLEIN⁶).

β) Quasistationäre (angeregte) Zustände.

In der gewöhnlichen Quantentheorie liefert die DIRAC-Gleichung eines Elektrons in einem äußeren Potentialfeld als Eigenwertgleichung die Energieniveaus von Grund- und angeregten Zuständen eines Atoms. In der Quantentheorie dagegen berücksichtigen die Gleichungen der Wellenfunktionen φ auch den Zerfall eines angeregten Atoms und können als scharfe Eigenwerte nur noch die Energien der stationären Grundzustände, nicht aber der angeregten Zustände ergeben. Es ist jedoch auch hier möglich, die Energie E und die sekundliche Zerfallswahrscheinlichkeit γ eines angeregten Atoms zu bestimmen. Als einfachstes Beispiel betrachten wir dazu die Integro-DG (9). Sie liefert beim Ansatz

$$\varphi(|y|) = \varphi(\vec{y}) e^{-iWty}$$

und der Forderung, daß φ überall endlich ist und im räumlich Unendlichen verschwindet, als Eigenwert nicht nur die Energie des Grundzustandes, sondern noch weitere im allgemeinen komplexe Eigenwerte $W = E - i\gamma/2$. Da die exakten Gleichungen der Wellenfunktionen die Übergänge von angeregten Zuständen in andere mit enthalten, wird man annehmen, daß E und γ Energie und Zerfallswahrscheinlichkeit eines „quasistationären Zustandes“ sind: Zur Zeit $t = 0$ ist das Atom in diesem Zustand, und im Laufe der Zeit nimmt die Wahrscheinlichkeit, es noch darin anzutreffen, exponentiell $\sim e^{-\gamma t}$ ab. Nun möchte man eine, der gewöhnlichen Quantentheorie analoge Gleichung haben, welche nur reelle Eigenwerte liefert, aus der man also die Eigenwerte mit Hilfe der üblichen Verfahren (z. B. Minimalprinzip) berechnen kann. Dazu wird man den komplexen Integraloperator der Gl. (9) in Real- und Imaginärteil zerlegen und zunächst nur den Realteil benutzen. Der Imaginärteil liefert dann, als Störung behandelt, die Zerfallswahrscheinlichkeit γ des entsprechenden Zustandes. Zur Durchführung dieser Gedanken multiplizieren wir die IntegroDG (9) mit β und schreiben sie in der Form

$$\{p_0 - (\vec{\alpha} \vec{p} + \beta m) - e\beta A^e\} \varphi = (H - iV) \varphi \quad (10)$$

Wenn das innere Produkt von zwei Wellenfunktionen durch die Integration über das ganze Raum-Zeit-Gebiet definiert ist,

$$(\varphi, \varphi') = \int \varphi^*(x) \varphi'(x) d^4x, \quad (11)$$

sind H und V hermitesche Integraloperatoren.

Lassen wir einmal die Vakuumpolarisation fort, so heißt die Gl. (10)

$$\{\not{p}_0 - (\overrightarrow{\alpha} \not{p} + \beta m) - e \beta A^e\} \varphi = i e^2 \int \beta \gamma_\nu S_+^e(y, y') \beta \cdot \beta \gamma^\nu \cdot \Delta_+(y - y') \varphi(|y'|) dy'$$

Hierin kann man die $+$ Funktionen in „Real- und Imaginär-Teil“ zerlegen:

$$\Delta_+ = \bar{\Delta} + \frac{i}{2} \Delta^{(1)} \quad S_+^e \beta = \bar{S}^e \beta + \frac{i}{2} S^{e(1)} \beta$$

(Die Funktionen sind in Anhang II gegeben.)

Die rechts stehenden Funktionen sind die Integralkerne von hermiteschen Integraloperatoren.

Es ist nämlich:

$$\bar{\Delta}^* (2 - 1) = \bar{\Delta} (2 - 1) = \bar{\Delta} (1 - 2)$$

Dasselbe gilt für $\Delta^{(1)}$, und

$$(\bar{S} (2, 1) \beta)^\dagger = \beta \bar{S}^\dagger (2, 1) = \bar{S} (1, 2) \beta$$

Dasselbe gilt für $S^{(1)}$. Damit wird z. B.

$$\int \varphi^* (1) \left\{ \int \bar{S} (1, 2) \beta \varphi' (2) d2 \right\} d1 = \int \left\{ \int \bar{S} (2, 1) \beta \varphi (1) d1 \right\}^* \varphi' (2) d2$$

Ebenso kann natürlich auch ein komplizierterer Integraloperator umgeschrieben werden. Auch ist $\beta \gamma^\nu = \{1, \vec{\alpha}\}$ hermitisch, man kann also die rechte Seite der Integro-DG zerlegen in:

$$\begin{aligned} H\varphi = & \frac{-e^2}{2} \int \{\beta \gamma_\nu \bar{S}^e(y, y') \gamma^\nu \Delta^{(1)}(y - y') + \\ & + \beta \gamma_\nu S^{e(1)}(y, y') \gamma^\nu \bar{\Delta}(y - y')\} \varphi(y') dy' \quad \text{und} \\ -iV\varphi = & i e^2 \int \left\{ \beta \gamma_\nu \bar{S}^e(y, y') \gamma^\nu \bar{\Delta}(y - y') - \right. \\ & \left. - \frac{1}{4} \beta \gamma_\nu S^{e(1)}(y, y') \gamma^\nu \Delta^{(1)}(y - y') \right\} \varphi(y') dy' \end{aligned} \quad (12)$$

Die erste Zeile stellt die Wirkung eines hermiteschen Integraloperators H , die zweite die eines antihermiteschen Integraloperators $-iV$ auf φ dar. Läßt man V fort, so erhält man beim Ansatz $\varphi(y) = \varphi(\vec{y}) e^{-iWt}$ nur reelle Eigenwerte W , die man hier am einfachsten bestimmt, indem man die rechte Seite als Störung betrachtet.

H enthält einen Anteil, der eine unendliche Massen-Renormierung ergibt. Man muß ihn fortlassen, wenn man die Theorie von vornherein als renormiert annehmen will. Für Elektronen und Lichtquantenfeld liefert der Rest den bekannten Zusatz zum magnetischen Moment des Elektrons und die LAMB-Verschiebung im H -Atom, die von KARPLUS und KLEIN genau ausgerechnet worden ist⁶. Der antihermitesche Operator $-iV$ berücksichtigt den Zerfall eines angeregten Atoms. Da

$$\bar{S}^e(y, y') \bar{\Delta}(y - y') = \frac{1}{4} S^e(y, y') \Delta(y, y')$$

ist, kann man für ihn auch schreiben:

$$\begin{aligned} -iV\varphi = & \frac{ie^2}{2} \int \beta \gamma_\nu \{ S^{e(+)}(y, y') \gamma^\nu \Delta^{(+)}(y - y') + \\ & + S^{e(-)}(y, y') \gamma^\nu \Delta^{(-)}(y - y') \} \varphi(y') dy' \end{aligned} \quad (13)$$

Die Bedeutung dieser Funktionen sieht man sofort ein, wenn man die ganze rechte Seite der Integro-DG als Störung behandelt und die Änderung eines Energieeigenwertes E_n der linken Seite auf die übliche Weise durch Bildung des Matrixelementes, mit Eigenfunktionen u_n der linken Seite, bestimmt. Wenn $E_n > 0$ ist, fällt dann das Glied mit $S^{(-)} \Delta^{(-)}$ fort, weil es nur Übergänge in negative Energien geben würde, und man hat:

$$\gamma_n = -e^2 \int \bar{u}_n(y) d^3y \gamma_\nu S^{e(+)}(y, y') \gamma^\nu \Delta^{(+)}(y - y') u_n(y') d^3y d^4y' \quad (14)$$

Dies ist genau die Zerfallskonstante, die man sonst aus der Summe über alle Übergangswahrscheinlichkeiten bestimmt hätte.

An dem zugehörigen Graphen sieht man sofort, daß für den Grundzustand $\gamma_0 = 0$ ist; denn die Funktionen $S^{e(+)}$ und $\Delta^{(+)}$ genügen den homogenen DGen (ohne δ Funktion), man hat also auch in den Zwischenzuständen reelle Teilchen positiver Energie; da aber an jedem Eckpunkt eines Graphen die Energieerhaltung gilt (A^e ist zeitlich konstant!), kann aus jedem Anfangszustand $u_n(x)$ nur ein Zwischenzustand *kleinerer positiver* Energie entstehen: Es wird ja gleichzeitig ein reelles Lichtquant positiver Energie gebildet.

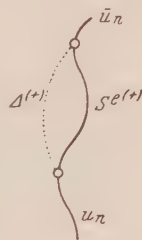


Abb. 2.

γ) Übergangswahrscheinlichkeiten.

Die Bestimmung von Übergangswahrscheinlichkeiten führt aus dem Rahmen einer S -Matrix-Theorie heraus, weil es sich nicht mehr um Streuprobleme zwischen unendlich großen Zeiten handelt: Wir nehmen an, daß zur Zeit $t = 0$ ein angeregtes Atom in einem bestimmten quasi-stationären, mit Hilfe von β) berechneten Zustand $\varphi(|\gamma|)$ vorhanden ist.

Die Entstehung eines Bosons wird durch die Wellenfunktion $\varphi(x|y)$ beschrieben, die bezüglich jeder Teilchenkoordinate einer hyperbolischen DG genügt. Unsere Anfangsbedingungen dafür sind:

Bezüglich t_y : Zur Zeit $t_y = 0$ ein angeregtes Atom mit der angereicherten Wellenfunktion $\varphi(|y|)$ vorhanden.

Bezüglich t_x : Von $t_x = -\infty$ her läuft kein freies Lichtquant ein. t_y ist also gleich der einen physikalisch beobachtbaren Schwerpunktszeit t , t_x eine überzählige Koordinate, die auftritt, weil das Problem relativistisch invariant behandelt wird. — Zunächst eliminieren wir t_x , indem wir nach der allgemeinen Vorschrift in FI hier die partielle Übergangsamplitude $\dot{U}(y)$ dafür bestimmen, daß für $t_x = -\infty$ ein Lichtquant der Wellenfunktion $\mathfrak{A}_\nu(x)$ entstanden ist. Da kein einlaufendes Lichtquant vorhanden ist, erhalten wir:

$$\dot{U}(y) = - \int \mathfrak{A}_\nu(x) \frac{1}{i} \square_x \varphi(x^\nu | y) dx \quad (15)$$

Aus der DG für $\varphi(x^\nu | y)$:

$\{\mathbf{p}_y - m - e\mathbf{A}^e(y)\} \varphi(x^\nu | y) = e\gamma_\mu \{\sigma(x^\nu y^\mu | y) - i\Delta_+^\mu(x - y) \varphi(|y|)\}$ folgt bei Vernachlässigung der höheren Wellenfunktion die einfache DG für $\dot{U}(y)$:

$$\{\mathbf{p}_y - m - e\mathbf{A}^e(y)\} \dot{U}(y) = e\mathfrak{A}_\nu^*(y) \gamma^\nu \varphi(|y|)$$

Als einfachste Näherung wird man $\varphi(|y|) = u_m(y)$ — Eigenfunktion eines Elektrons im äußeren Feld ansetzen und \dot{U}^ν nach diesen Eigenfunktionen entwickeln:

$$\dot{U}(y) = \sum_n a_n(t_y) u_n(y) \quad (16)$$

Für die a_n gelten dann die DGen:

$$i \dot{a}_n(t_y) = e \int \bar{u}_n(y) d^3y \mathfrak{A}_\nu^*(y) \gamma^\nu u_m(y)$$

Durch Integration zwischen 0 und T erhalten wir daraus die ganze Übergangsamplitude $a_{Kn}(T)$ dafür, daß zur Zeit T ein Elektron in dem Zustand n und ein Boson mit der Wellenfunktion \mathfrak{A}_K (Impuls K) vorhanden ist:

$$a_{Kn}(T) = \frac{e}{i} \int_0^T \int \bar{u}_n(y) \mathfrak{A}_{K}^*(y) \gamma^\nu u_m(y) d^3y dt_y \quad (17)$$

Da der Integrand periodisch in t_y ist ($\sim e^{-i(E_m - E_n - \hbar\omega_K)t_y}$ mit $\hbar\omega_K$ — Energie des entstehenden Lichtquants), folgen wie üblich die Erhaltung der Energie und die sekundliche Übergangswahrscheinlichkeit (s. DIRAC, Quantum theory). Das Ergebnis ist mit dem auf bisher übliche Weise berechneten identisch⁷; die hier gegebene Methode kann

⁷ W. HEITLER, Quantum Theory of Radiation.

aber ohne weiteres zur Bestimmung höherer Näherungen benutzt werden, die endlich sind, sobald man die Renormierung auf übliche Weise durchgeführt hat.

3. Ein einlaufendes Lichtquant und ein gebundenes Elektron.

Wenn ein Lichtquant auf ein Wasserstoffatom fällt, kann es dies anregen oder, bei genügend großer Energie, das Elektron heraus schlagen (Photoeffekt). Der HEISENBERG-Zustand für dieses Problem ist gegeben durch:

$$\Psi_H^{gs} = - \int A_{\nu in}^{(-)}(x) i \overleftrightarrow{\partial}_{\mathbf{r}_x} d^3x \mathfrak{A}_K^{\nu}(x) \Psi_H^g \quad (18)$$

Dabei ist $\mathfrak{A}_K^{\nu}(x)$ die Wellenfunktion eines Lichtquants mit dem Impuls K und Ψ_H^g der HEISENBERG-Zustand des gebundenen Elektrons im Grundzustand.

Für $\varphi(|y|)$ erhalten wir genau wie in 1. die Integro-DG (9); auf deren rechter Seite steht jetzt aber außerdem das Glied $e \gamma_{\nu} \mathfrak{A}^{\nu}(y) \varphi_0(|y|)$, da in der IG für $\varphi(x|y)$ das inhomogene Glied, mit der Wellenfunktion $\mathfrak{A}^{\nu}(y)$ eines einlaufenden Lichtquants, nicht fortfällt. Lassen wir alle Strahlungsrückwirkungen fort, so erhalten wir natürlich die DG

$$(\mathbf{p} - m - e \mathbf{A}^e) \varphi(|y|) = e \mathfrak{A}(y) \varphi_0(|y|), \quad (19)$$

aus der ähnlich wie in zweitens die angenäherte Übergangswahrscheinlichkeit für die Absorption eines Lichtquants unter Anregung des Atoms folgt. Auch hier ist es klar, wie man höhere Näherungen zu rechnen hätte.

III. Die Integralgleichungen für 2 Fermiteilchen.

Sind zwei einlaufende freie Elektronen oder ein Elektron und ein Positron gegeben, so lassen sich die IGen für alle zugehörigen Wellenfunktionen nach FI leicht aufschreiben. Die entsprechenden homogenen IGen (in denen alle auftretenden freien Teilchen Wellenfunktionen $\chi = 0$ sind), werden unter anderem durch Wellenfunktionen gelöst, die zu gebundenen Teilchen gehören. In der Quantenelektrodynamik ohne äußeres Feld gibt es zwar keine nicht zerfallenden gebundenen Teilchen, wohl aber das Positronium als quasistationären Zustand. Seine Energie und Zerfallswahrscheinlichkeit kann man in genügender Näherung aus der Theorie berechnen.

Um solch ein 2-Elektron-Problem näherungsweise zu behandeln, wäre es am besten, könnte man eine kleine Zahl der homogenen IGen unter Vernachlässigung höherer Wellenfunktionen simultan lösen. Da dieses bisher nicht möglich war, kann man aber auch wie in II zuerst eine einzige IG für die einfachste dem Problem entsprechende Wellenfunktion herstellen. Dazu muß in den IGen für die höheren Wellenfunktionen nach dieser einen iteriert werden, die entstehende IG hat daher nur genäherte Gültigkeit. Statt dieses komplizierten Verfahrens

— die IGen zu iterieren und gegenseitig ineinander einzusetzen — stellt man lieber mittels der Wechselwirkungsdarstellung die IG für ein Streuproblem her und läßt nachher für gebundene Teilchen die freie Teilchen-Wellenfunktion χ fort. Diese schon in FI angegebene Möglichkeit wollen wir hier auf das Positronium anwenden, da dafür die Methode von GELL-MANN und LOW⁸ nicht geeignet ist. In der Wechselwirkungsdarstellung heißt die geeignete Wellenfunktion:

$$\varphi(|y|z) = (\Psi_f^0, T\{\psi_w(y)\psi_w'(z): U(\infty, -\infty)\}\Psi_f) \quad (20)$$

Dabei ist Ψ_f der auf 1 normierte freie Teilchen-Zustand, der ein Elektron und ein Positron positiver Energie charakterisiert:

$$\Psi_f = \int \bar{\psi}^{(-)}(y) \beta d^3y \chi_e(y) \cdot \bar{\psi}'^{(-)}(z) \beta d^3z \chi_p(z) \cdot \Psi_f^0$$

Und es ist:

$$U(\infty, -\infty) = \sum \frac{(-i)^n}{n!} \int d1 \dots \int dn H(1) \dots H(n)$$

mit

$$H(x) = e S \hat{p} C^* \gamma_\nu A^\nu(x) : \psi(x) \psi'(x) :$$

Bis zur Näherung e^2 treten folgende Graphen auf:

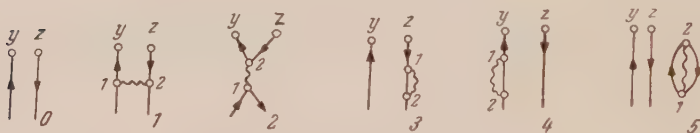


Abb. 3.

(Vertauscht man in den Graphen 1 bis 4 x_1 mit x_2 , so tritt ein topologisch neuer Graph auf, der dasselbe Ergebnis liefert. Dadurch wird gerade der in der S-Matrix erscheinende Faktor $1/2!$ kompensiert.)

Graph 0 gibt das inhomogene Glied.

Die Graphen 1 und 2 geben eine echte Wechselwirkung zwischen den Teilchen, wobei der Graph 2 charakteristisch für Probleme ist, in denen ein Teilchen und ein Anti-Teilchen auftreten; die Graphen 3 und 4 geben eine unendliche Renormierung der Elektronenmasse, wir können sie fortlassen. Graph 5 enthält einen unabhängigen geschlossenen Anteil (disconnected closed loop), der nur einen zusätzlichen Faktor zur freien Wellenfunktion des Graphen 0 gibt. Dieser Faktor ist die erste Näherung für den in allen φ Funktionen enthaltenen Phasenfaktor $\langle \Psi_f^0, S \Psi_f^0 \rangle = \varphi(||)$, der unwesentlich ist und daher immer fortgelassen werden soll (vgl. die IGen in FI).

⁸ M. GELL-MANN und F. LOW, Phys. Rev. **84**, 350 (1951).

Wir erhalten damit in der Näherung e^2 als IG für φ :

$$\begin{aligned} \varphi(|y|z) &= \chi(|y|z) - e^2 \int i S_+(y-1) \gamma_\nu^{(1)} i S_+(2-z) \gamma_\nu^{(2)} \\ & i D_+(2-1) \chi(|1|2) d1 d2 + e^2 \int i S_+(y-2) \gamma_\nu i S_+(2-z) C^T \\ & i D_+(2-1) S \not{p} \{C^* \gamma_\nu \chi(|1|1)\} d1 d2 \end{aligned} \quad (21)$$

Die höheren Näherungen zur IG lassen sich analog bestimmen.

Durch Iteration der inhomogenen Gleichung nach χ kann man näherungsweise die Wellenfunktion für Elektron-Positron-Streuung bestimmen; die Übergangsamplitude berechnet man gemäß FI.

Zur Bestimmung von Bindungsenergie und Zerfallswahrscheinlichkeit des Positroniums nimmt man die homogene IG, berücksichtigt die im Graphen 2 enthaltene COULOMB-Wechselwirkung exakt und behandelt den Rest als Störung (vgl. 6).

IV. Ausstrahlung von Lichtquanten durch einen vorgegebenen Strom.

Ein Elektron sendet bei einer momentanen Beschleunigung einen Schauer von Lichtquanten aller Frequenzen aus. Wenn wir die Bildung von Elektronenpaaren (reelle und virtuelle) vernachlässigen und ebenso die Strahlungsrückwirkung auf das Elektron, bleibt nur die Wechselwirkung des Lichtquantenfeldes mit einem vorgegebenen äußeren Strom übrig. Die Feldgleichung dafür:

$$\square A^\nu(x) = -j^\nu(x) \quad (22)$$

Die Übergangswahrscheinlichkeit für die Erzeugung von l Lichtquanten kann man mittels der S-Matrix berechnen⁹, viel einfacher ist es aber, die Wellenfunktion:

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{l!}} (\Psi_H^0, :A_H(x_1) \dots A_H(x_l): \Psi_H^0) = \frac{1}{\sqrt{l!}} \sigma$$

und ihre IGen zu benutzen. — Die DG einer solchen σ -Funktion bezüglich x_1 heißt:

$$\square_{x_1} \sigma(x_1 \dots x_l) = -j(x_1) \sigma(x_2 \dots x_l) \quad (23)$$

Daraus folgt wie in FI die IG:

$$\begin{aligned} \sigma(x_1 \dots x_l) &= \sum_{s=1}^{e'} \mathfrak{A}_s(x_1) \sigma(x_2 \dots x_l) + \\ &+ \int D_+(x_1 - x_1') j(x_1') dx_1' \cdot \sigma(x_2 \dots x_l) \end{aligned} \quad (24)$$

Da kein einlaufendes Teilchen vorhanden ist, sind alle $\mathfrak{A}_s = 0$. Man sieht, daß die σ -Funktion in ein Produkt bezüglich der verschiedenen Lichtquantenkoordinaten zerfällt. Für die Wellenfunktion erhalten wir also:

⁹ R. J. GLAUBER, Phys. Rev. **84**, 395 (1951).

$$\varphi(x_1 \dots x_e) = \frac{1}{\sqrt{e!}} \prod_{i=1}^e \int D_+(x_i - x_i') j(x_i') dx_i' \cdot \varphi(||) \quad (25)$$

Dabei ist wichtig, daß hier der Betrag von

$$\varphi(||) = (\Psi_H^0, \Psi_H^0) = (\Psi_f^0, S \Psi_f^0) \quad (26)$$

nicht 1 ist, weil im Laufe der Zeit aus dem Vakuum Ψ_w^0 ($-\infty$) durch den äußeren Strom Lichtquanten erzeugt werden, die Wahrscheinlichkeit für $t \rightarrow +\infty$ wieder das Vakuum vorzufinden, also kleiner als 1 geworden ist. Energie und Impuls sind jetzt natürlich keine Erhaltungsgrößen mehr, die beiden „HEISENBERG-Vakua“ Ψ_H^0 und $\Psi_H^{\prime 0}$ sind daher nur noch definiert durch die Forderung: Kein einlaufendes freies Lichtquant vorhanden ($A_{in}^{(+)} \Psi_H^0 = 0$), bzw. kein auslaufendes Lichtquant ($A_{out}^{(+)} \Psi_H^{\prime 0} = 0$).

Man kann $\varphi(||)$ ähnlich wie GLAUBER⁹ mittels der S -Matrix berechnen, es genügt aber auch, am Schluß zu berücksichtigen, daß die Gesamtwahrscheinlichkeit für irgendein Ereignis = 1 sein muß.

Nach der allgemeinen Methode in FI erhalten wir als Übergangsamplitude für die Erzeugung von l Lichtquanten mit der Wellenfunktion $\chi(x_1 \dots x_e)$

$$\dot{U} = \frac{(-i)^e}{e!} \int \bar{\chi}(x_1 \dots x_e) j(x_1) \dots j(x_e) dx_1 \dots dx_e \cdot \varphi(||) \quad (27)$$

Das Absolutquadrat davon liefert die Übergangswahrscheinlichkeit für die Erzeugung von Lichtquanten mit bestimmten Impulsen. Wir wollen gleich die totale Übergangswahrscheinlichkeit für Entstehung von l Lichtquanten bilden, summieren also über alle freien Lichtquantenwellenfunktionen positiver Energie. Da

$$\sum_{m=\text{positive Energie}} \mathfrak{A}_\mu^m(x) \mathfrak{A}_\nu^{m*}(x') = -i g_{\mu\nu} D^{(+)}(x - x') \quad (28)$$

ist, wird die Übergangswahrscheinlichkeit

$$\left. \begin{aligned} p_e &= \frac{W^e}{e!} |\varphi(||)|^2 \\ \text{mit} \quad W &= - \int j_\nu(x) i D^{(+)}(x - x') j^\nu(x') dx dx' \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

In

$$i D^+ = \frac{D^{(1)}}{2} + \frac{i D}{2}$$

ist die D -Funktion antisymmetrisch und fällt bei der Integration fort. — Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß irgendeine Zahl von Lichtquanten emittiert wird, muß 1 sein:

$$\sum p_e = e^W |\varphi(||)|^2 = 1$$

Damit wird die totale Wahrscheinlichkeit für Aussendung von l Lichtquanten:

$$p_e = \frac{W^e}{e!} e^{-W} \quad (30)$$

Man bekommt die Poisson-Verteilung, weil die Wellenfunktionen in ein Produkt zerfallen, die verschiedenen Teilchen also unabhängig voneinander emittiert werden. Die Größe W enthält die bekannte Infrarotdivergenz^{9 10}, das heißt bei rascher Beschleunigung sendet das Elektron sehr viele (unendlich viele) Lichtquanten sehr kleiner Energie aus.

Anhang.

1. Bezeichnungen.

Da die meisten physikalisch wichtigen 4-Vektoren zeitartige Richtung haben (z. B. 4-Impuls), soll die von FEYNMAN benutzte Metrik verwandt werden, in der das Quadrat eines zeitartigen 4-Vektors positiv ist.

Zum Beispiel wird die Ruhenergie $= \sqrt{p^2} = \sqrt{p_0^2 - \vec{p}^2}$. Weiter ist:

$$\begin{aligned} \not{p} x &= \not{p}_\nu x^\nu = \not{p}_0 x_0 - \vec{\not{p}} \vec{x}, \\ \not{p} &= \gamma_\nu \not{p}^\nu = \beta \not{p}_0 - \vec{\alpha} \vec{\not{p}} \end{aligned}$$

analog für andere fett gedruckte Vektoren.

Wenn \not{p} der Differentialoperator ist, wird das:

$$\not{p} = i \gamma_\nu \partial^\nu = i \beta \partial_0 + i \vec{\alpha} \vec{\nabla}$$

Für die γ -Matrizen gelten die Vertauschungsrelationen:

$$[\gamma_\mu, \gamma_\nu]_+ = 2 g_{\mu\nu} = 2 \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$$

2. Die Δ - und S -Funktionen.

In der Wechselwirkungsdarstellung heißen die Lösungen des Anfangswertproblems (wenn die Operatoren $\psi_W(x')$, $A_W(x')$, $\dot{A}_W(x')$ zur Zeit t' vorgegeben sind):

$$\begin{aligned} \psi_W(x) &= \frac{1}{i} \int S(x, x') \beta d^3x' \psi_W(x') \\ A_W(x) &= - \int \Delta(x - x') \overleftrightarrow{\partial}_t d^3x' A_W(x') \end{aligned}$$

¹⁰ F. BLOCH und A. NORDSIECK, Phys. Rev. **52**, 54 (1937). — W. PAULI und M. FIERZ, Nuovo cimento **15**, 167 (1938).

mit

$$\overleftrightarrow{\partial}_t = \overrightarrow{\partial}_t - \overleftarrow{\partial}_t \quad \text{wobei} \quad A(x) \overleftarrow{\partial}_t = -\dot{A}(x)$$

ist.

Ohne äußeres Feld sind S und A die üblichen Fortpflanzungsfunktionen (s. SCHWINGER⁴). Mit äußerem Feld ist die Funktion $S(x, x') = S^e(x, x')$ bestimmt durch:

$$\begin{cases} \{p_x - e A^e(x) - m\} S^e(x, x') = 0 \\ \frac{1}{i} S^e(x, x') = \beta \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \quad \text{für} \quad t = t' \end{cases}$$

Wie üblich kann man die Feldoperatoren $O_w(x)$, sowie die S - und A -Funktionen nach positiven und negativen Frequenzen zerlegen (ein äußeres Feld muß dazu zeitlich konstant sein) und dann die verschiedenen Arten von S - und A -Funktionen einführen¹¹. Wir benutzen außerdem noch die Funktionen

$$S_+ = \bar{S} + \frac{i}{2} S^{(1)} = \begin{cases} -S^{(+)} & \text{für } t > t' \\ +S^{(-)} & \text{für } t < t' \end{cases}$$

$$A_+ = \bar{A} + \frac{i}{2} A^{(1)} = \dots$$

Dabei ist $S_+ = -i K_+$ (K_+ = FEYNMANS Funktion).

$S_+(x, x')$ genügt auch der IG

$$S_+^e(x, x') = S_+(x - x') + \int_{-\infty}^{\infty} S_+(x - x'') e A^e(x'') S_+^e(x'', x') dx''$$

ist durch sie aber nicht eindeutig bestimmt, denn man kann zu $S_+^e(x - x')$ eine beliebige Lösung der homogenen IG hinzuaddieren (z. B. $u_0(x) \bar{u}_0(x')$) und erhält wieder eine Lösung. Die Entwicklung der IG für die Fortpflanzungsfunktionen S_+^e in eine NEUMANNsche Reihe ist nur dann eine gute Näherung, wenn S_+^e ungebundene Teilchen mit ebensolchen verknüpft, das heißt für reine Streuprobleme; aber auch dann nur, wenn das äußere Feld z. B. einen Atomkern mit kleiner Kernladungszahl Z darstellt. Für große Z konvergiert die Entwicklung nur schlecht (mit Potenzen von $Z \alpha$), und, wenn S_+ als Fortpflanzungsfunktion von gebundenen Teilchen auftritt, überhaupt nicht mehr (weil dies der Entwicklung eines gebundenen Zustandes nach der Kopplungskonstanten entspricht). In den letzteren Fällen muß man S_+ durch näherungsweise Ausrechnen des T -Produktes selbst bestimmen⁵ oder durch Summation über die Eigenfunktionen der DIRAC-Gleichung mit äußerem Feld.

Die S -Funktionen ohne äußeres Feld und die A -Funktionen lassen sich am bequemsten durch die von HEISENBERG angegebenen Integrationswege definieren:

¹¹ W. PAULI, Ausgewählte Kapitel aus der Feldquantisierung. (Vorlesungsausarbeitung.)

Auch die S^e -Funktionen lassen sich (bei zeitlich konstantem äußeren Feld) durch solche Integrationswege definieren:

$$S^e(x, x') = \sum_n \int \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{\omega - E_n} \frac{d\omega}{2\pi} u_n(\vec{x}) \bar{u}_n(\vec{x}')$$

$u_n(\vec{x})$ sind die Eigenfunktionen der DIRAC-Gleichung mit äußerem Feld, die hier offenbar an die Stelle der ebenen Wellen in den S -Funktionen treten. Die Integrationswege sind dieselben.

3. Die Normierung für freie Teilchen.

Aus den DGen für freie Teilchen folgt, daß folgende Normierungen zeitunabhängig sind:

$$\begin{aligned} \int \chi^\dagger(x) d^3x \chi(x) &= \int \bar{\chi} \beta d^3x \chi = 1 \\ -i \int A_\nu^*(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 A^\nu(x) d^3x &= -i \int (A_\nu^* \dot{A}^\nu - \dot{A}_\nu^* A^\nu) d^3x = 1 \end{aligned}$$

Das Integral für die Lichtquantenwellenfunktion ist an sich bei beliebiger Wahl von A_ν indefinit; wir werden aber nur Funktionen $A_\nu(x)$ benutzen, deren FOURIER-Komponenten zu positiven Frequenzen gehören; dann ist diese Normierung möglich.

Analog wird die Normierung für mehrere freie Teilchen gewählt. Bei Transformation in den Impulsraum erhält man die übliche Schreibweise.

Anhang II.

Die Differentialgleichungen der τ - und σ -Funktionen.

1. Die DGen der τ -Funktionen

$$\tau(x_1 \dots | y_1 \dots | z_1 \dots) = (\Psi_H^0, T A_H(x_1) \dots \psi_H(y_1) \dots \psi_H'(z_1) \Psi_H)$$

Ein T -Produkt von Operatoren entspricht einer Funktion von mehreren Veränderlichen, welche für alle Koordinatenpunkte Sprungstellen hat, für die zwei Zeitvariable gleich werden. Diese Sprungstellen sind hier durch die Vertauschung (bzw. Antivertauschung) von zwei Operatoren gegeben. Unstetige Funktionen erhalten im allgemeinen erst durch Integration über alle Unstetigkeitsstellen ein physikalisches Interesse, so auch die T -Produkte. Ihre DGen sind nun leicht zu bestimmen: Bei der Differentiation nach einer Zeitkoordinate integriert man gleich wieder über diese Zeit und kann das Integral dann in eine Summe umformen, die einmal aus dem Integral besteht, in dem Differentiation und T -Symbol vertauscht sind, und zum anderen aus Gliedern, welche die Vertauschungsrelationen von Operatoren zu gleichen Zeiten enthalten.

Wir wollen gleich das allgemeine Ergebnis hinschreiben. Dazu machen wir folgendes ab: Analog den von WICK eingeführten „ \vdash -Funktions-Kontraktionen“ (welche $-i D_{\vdash}^{\mu\nu}$, bzw. $i S_{\vdash} C^T$ ergeben) werden hier „ δ -Funktions-Kontraktionen“ benutzt, die jeweils gleich der differenzierten \vdash -Funktion sind, also $i \delta^{\mu\nu}$, bzw. $i \delta C^T$ liefern (mit der bei Kontraktionen üblichen Vorzeichenregel). Kontraktionspunkte und -Striche (für die Summe über mehrere Koordinaten)¹ sollen dabei unten stehen. Damit können wir die DGen der τ -Funktionen formal sehr einfach schreiben:

$$\left. \begin{aligned} (P_{y_k} - m) \tau(x_1 \dots x_e | y_1 \dots y_k \dots y_m | z_1 \dots z_n) = \\ = e \gamma_\nu \tau(x_1 \dots x_e | y_k^\nu | y_1 \dots y_k \dots y_m | z_1 \dots z_n) + \\ + \tau(x_1 \dots x_e | y_1 \dots y_k \dots y_m | z_1 \dots z_n) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} (P_{z_k} - m) \tau(x | y | z_1 \dots z_k \dots z_n) = -e \gamma_\nu \tau(x | z_k^\nu | y | z_1 \dots z_k \dots z_n) + \\ + \tau(x | y | z_1 \dots z_k \dots z_n) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \square_{x_k} \tau(x_1 \dots x_k^\nu \dots x_e | y | z) = e C^* \gamma^\nu \tau(x_1 \dots x_{k-1} x_{k+1} \dots x_e | y | x_k z) + \\ + \tau(x_1 \dots x_k^\nu \dots x_e | y | z) \end{aligned} \right\}$$

Dabei beziehen sich die Spinorindizes in γ_ν immer auf die doppelt auftretenden Koordinaten. In der letzten Gleichung ist natürlich die entsprechende Spur zu nehmen, analog der DG (1). Die δ -Funktionen sollen auch das KRONECKER-Symbol $\delta^{\alpha\beta}$ für die zugehörigen Spinorindizes, bzw. den Tensor $-g^{\mu\nu}$ für die Vektorindizes enthalten.

Aus den DGen der τ -Funktionen können wir auf die der Wellenfunktionen schließen, dazu brauchen wir

2. Die Umrechnung der σ - in die τ -Funktionen.

Die allgemeine Regel dafür wurde schon in FI angegeben, wir wollen sie hier nachprüfen. Die Behauptung ist:

$$\sigma_0 = \tau_0 - \tau_1 + \tau_2 - \dots$$

Ein Index k bedeutet die Summe über alle möglichen Funktionen mit k Kontraktionen (\vdash -Funktions-). Wenn man nun die WICKsche Regel³ für die Umrechnung von T in S -Produkte benutzt, sieht man, daß gilt:

$$\tau_k = \sigma_k + \binom{k}{1} \sigma_{k+1} + \binom{k}{2} \sigma_{k+2} + \dots$$

Setzt man das in die vermutete Gleichung ein, so wird:

$$\sigma_0 = \sum_{k=0}^{[n/2]} (1-x)^k \sigma_k \Big|_{für x=1} = \sigma_0 \quad \begin{array}{l} [n/2] = \text{größtes Ganzes von } n/2, \\ \text{wobei } n = \text{Zahl der Operatoren} \\ \text{im } S\text{-, bzw. } T\text{-Produkt ist.} \end{array}$$

Damit ist die Regel bewiesen.

3. Die DGen der σ -Funktionen können damit leicht abgeleitet werden. Wir führen dies für eine spezielle Gleichung durch, die anderen Fälle sehen genau so aus.

$$(p_{y_m} - m) \varphi(x | y | y_m | z) = (p_{y_m} - m) \{ \tau_0 - \tau_1 + \tau_2 - + \dots \}$$

können wir nach 1. angeben:

$$\begin{aligned} &= [e \gamma_\nu \tau(x | y_m^\nu | y | y_m | z) + \tau(x | y | y_m | z)] \\ &- \left[e \gamma_\nu \{ \tau(x | y_m | y | y_m | z)_1 - \tau(\bar{x} | y_m^\nu | y | y_m | z) - \tau(x | y_m | y | y_m | \bar{z}) \} \right. \\ &\quad \left. + \tau(x | y | y_m | z) + \tau(x | y | y_m | z)_1 \right] \\ &+ \left[e \gamma_\nu \{ \tau(x | y_m | y | y_m | z)_2 - \tau(\bar{x} | y_m^\nu | y | y_m | z)_1 - \tau(x | y_m | y | y_m | \bar{z})_1 - \right. \\ &\quad \left. - \tau(\bar{x} | y_m^\nu | y | y_m | \bar{z}_0) \} \right. \\ &\quad \left. + \tau(x | y | y_m | z)_1 + \tau(x | y | y_m | z)_2 \right] \\ &- + \dots \end{aligned}$$

In den geschweiften Klammern werden diejenigen Glieder vom ersten abgezogen, die beim Ausschreiben von dessen Kontraktionen zuviel auftreten würden. Die einzelnen τ -Funktionen kann man wieder zu σ -Funktionen zusammenfassen, die δ -Funktions-Kontraktionen (mit unteren Punkten und Strichen) fallen alle gegeneinander fort. Damit folgt die DG:

$$\begin{aligned} (p_{y_m} - m) \sigma(x | y | y_m | z) &= e \gamma_\nu \{ \sigma(x | y_m^\nu | y | y_m | z) + \sigma(\bar{x} | y_m^\nu | y | y_m | z) + \\ &\quad + \sigma(x | y_m^\nu | y | y_m | \bar{z}) - \sigma(\bar{x} | y_m^\nu | y | y_m | \bar{z}) \} \end{aligned}$$

Buchbesprechungen.

Modern Mass Spectrometry. Von G. F. Bassford. „Processes in Industry.“ Mit 156 Textabb. 126 S. London: The Institute of Physics. 1953. Geb. 50 s.

Es ist kein Zufall, daß das gleichzeitig mit dem ausgezeichneten Buch von Lewis und Harkness über die Methoden und Anwendungen der Massenspektrometrie auch in England ein hervorragendes Werk über das gleiche Thema erschienen ist. Das allgemeine Interesse, welches sich heute wieder im steigenden Maße der Massenspektrometrie zuneigt, ist vor allem durch die große Zahl von neuen und wertvollen Anwendungsgebieten, wie z. B. der Isotopenuntersuchungen, der Kinetischen Untersuchungen, dazu kommt auch die in neuerer Zeit erzielten, weitgehenden Fortschritte in der Verbesserung der ionenoptischen System (z. B. Methode der Ionenfokussierung, mit deren Hilfe das Auflösungsvermögen bis etwa auf das Zehnfache gesteigert werden konnte).

Das vorliegende Buch — ein hervorragender Praktiker —, welcher von einer zentralen Stellung aus die Entwicklung der Massenspektrometer, bzw. spektroskopischen Methoden, bis hin zum Wert auf die Physik und die Technologie der Massenspektrometer gelegt und sehr eingehend die Anwendungsgebiete behandelt. Der physikalische Teil wird im ersten Kapitel über mathematische Ableitungen, dann weiter zum Instrumentenbau übergeführt und behandelt, wobei die fundamentalen Begriffe Ionenoptik und Ionenfokussierung an Hand der historischen Beispiele des Gitterstrahlens bzw. Ionenfokussierten Spektrographen, bzw. modernere Beispiele werden. Besonders Gewicht legt der Verfasser auf das Problem der Quantifizierung und die damit verbundenen technologischen Probleme, wie etwa die Isotopenanreicherung durch Fraktionierung bzw. durch Fraktionen an den Isotopenmassenanalyse. Im weiteren Verlauf werden die verschiedenen Anwendungsgebiete der Massenspektrometrie und die Fortschritte in der Physik, Chemie und Industrie eingehend besprochen. Von den weiteren Fortschrittsgebieten befindet sich ganz am Ende des Massenspektres der Moleküle sehr eingehend, wobei ein besonderer Platz den Untersuchungen der Kohlenwasserstoffe gewidmet wurde. Das Buch ist, wie das Bucher explizit festsetzt, leicht faßlich geschrieben und kann ganz den wichtigsten Aspekten der Massenspektrometrie zu einem tiefen Eindringen in die behandelten Gebiete.

E. LEDINEGG, Graz.

Excitation Quanta. Von J. B. Rose. (Pergamon Library Series "Electronics and Waves." Herausgegeben von D. W. Fry.) Mit 62 Textabb. VIII, 148 S. London: Pergamon Press Ltd. 1953. Geb. 21 s.

Zunehmend wichtiger gewinnt zu den klassischen Untersuchungsmethoden der Kristallphysik, vornehmlich jedoch als Hilfsmittel gegenüber anderen Zustandsgrößen, in den letzten Jahren wurde aus durch Bestrahlung neuer Phosphore und gasförmiger Ionen mit dem Schichtkristallzähler ein Licht geschaffen, das eine andere Zahlensprache gegenüber in manchen Bereichen sogar überlegen ist. In dem vorliegenden Buch werden aus der damit zusammenhängenden physikalischen und technischen Fragen behandelt und eine neue, solide Grundlage für das Verständnis der Wechselwirkung und Wechselwirkung mit Instrumenten, das zu den wichtigsten der modernen Physik der Elementarteilchen gehört, gegeben.

Besondere Erwähnung verdient der Abschnitt über organische Phosphore, ein besonderes Anliegen des Autors, gleichzeitig eine Zusammenfassung seiner neuesten Forschungsergebnisse. Das umfangreiche Literaturverzeichnis am Schluß des Buches, das bis März 1953 vollständig ist, zeigt, wie sehr das Thema gerade in den letzten Jahren an Aktualität gewonnen hat.

Druck und Ausstattung sind trotz der außerordentlich raschen Publikation erstklassig.

H. MITTER, Graz.

Die Laplace-Transformation und ihre Anwendung. Von P. FUNK, H. SAGAN und F. SELIG. Mit 18 Textabb., VII, 106 S. Wien: F. Deuticke. 1953. S 50,—

Das hauptsächlich für Techniker geschriebene Büchlein stellt auch für den Physiker eine wertvolle Einführung in Theorie und Anwendung der LAPLACE-Transformation dar. Es nimmt eine mittlere Stellung ein zwischen der rein mathematischen Literatur, wie etwa das Lehrbuch von G. DOETSCH, einerseits und der rein technisch orientierten Darstellung andererseits, die nur Anwendungen bringt. Ein eigener Abschnitt ist sogar den so wichtigen asymptotischen Entwicklungen gewidmet, ebenso den Regelvorgängen. Am Schluß können die Autoren nicht umhin, doch einen kurzen historischen Überblick zu geben, der die Stellung der LAPLACE-Transformation klar umreißt. Ausführliche Literaturangaben ermöglichen dem Leser tiefer einzudringen und die Kenntnisse zu erweitern. Druck und Ausführung des Büchleins ist vorbildlich. Es kann wärmstens unseren Hörern empfohlen werden.

P. URBAN, Graz.

Ausgewählte Aufgaben und Probleme aus der Experimentalphysik. Eine Einführung in die exakte Behandlung physikalischer Fragestellungen. Von H. GREINACHER. Zugleich dritte, vermehrte Auflage der „Ergänzungen zur Experimentalphysik“. Mit 117 Textabb., IX, 266 S. Wien: Springer-Verlag. 1953. S 87.—, sfr. 14.90, \$ 3.45, DM 14.50.

Zur unveränderten zweiten Auflage wurden 22 Kapitel aus allen Gebieten der Physik hinzugenommen und dieser als „Neue Folge“ angegliedert. Es handelt sich wieder um sehr instructive Beispiele, die zum Teil auf Veröffentlichungen des Verfassers zurückgehen. Besonders zu erwähnen ist der logisch-didaktische Aufbau der einzelnen Kapitel: Zunächst wird in wenigen Worten der physikalische Tatbestand festgestellt. Darauf folgen prägnante Fragen, die einen einfachen Ansatz gestatten. Jahrzehntelange Erfahrungen in der Lehrtätigkeit ermöglichen es dem Verfasser, an diesen Stellen immer wieder auf zunächst naheliegende Fehler hinzuweisen. Die mathematische Behandlung führt dann zwanglos zu Verallgemeinerungen des Problems, die immer nur angeführt werden, wenn sie praktisches Interesse besitzen. Den Kapitelschluß bilden meist ein oder zwei kleine Aufgaben, an denen der Leser ersieht, ob ihm die Zusammenhänge klar sind. Die Neuauflage des Buches wird sowohl dem Hochschullehrer als auch dem Studenten willkommen sein.

H. STIPPEL, Graz.

Gegenwärtige Probleme und Aufgaben der Physik des festen Erdkörpers. Von H. HAALCK. Mit 12 Abb., 84 S. DM 8,80.

Wieweit lassen sich die physikalischen Elementarprozesse mit einer anschaulichen Modellvorstellung vereinbaren? Von H. HAALCK. 24 S. DM 2,80. Berlin: Naturwissenschaftlicher Verlag vorm. Verlag von Gebrüder Borntraeger. 1952.

Während einzelne Probleme der geophysikalischen Forschung schon seit langer Zeit im Rahmen der Physik, Astronomie oder Geologie und Mineralogie behandelt wurden, ist die Geophysik selbst eigentlich eine junge Wissenschaft. Unser Wissen

über physikalische Vorgänge auf der Erde, ja sogar im Weltraum ist viel genauer und weitgehender als unsere Kenntnisse über die physikalischen Verhältnisse des Erdkörpers selbst.

In seiner kurzen Schrift unternimmt der Verfasser eine Aufnahme der gelösten und noch offenen Fragen der Geophysik. Diese Übersicht, die gleichzeitig eine kritische Wertung einschließt, ist in gewissem Maße trotz aller Kürze umfassend zu nennen. Es werden allerdings gewisse Grundbegriffe der Geophysik beim Leser vorausgesetzt, gleichwohl ist dieses Büchlein auch für den Physiker, der auf anderen Fachgebieten arbeitet, lesenswert und interessant. Besonders Studenten kann es als Einführung in die Geophysik und ihre Arbeitsmethoden empfohlen werden.

In seiner zweiten Arbeit versucht der Verfasser die in der klassischen Physik so überaus brauchbaren und nützlichen Modellvorstellungen auch auf die Probleme der Atomphysik anzuwenden. Es gelingt ihm immerhin, einige Züge der modernen Auffassung modellmäßig zu deuten. Die Grenzen und die Tragfähigkeit der Modellvorstellung in diesem Bereich der physikalischen Forschung werden besprochen und abgegrenzt. Mögen auch die Ansichten über die Nützlichkeit und Berechtigung solcher Darstellungsversuche geteilt sein, so ist diese kleine Schrift dennoch wert diskutiert zu werden und enthält manche interessante Anregung.

K. SCHWEINZER, Graz.

Handbuch der Vakuumtechnik. Von E. L. HOLLAND-MERTEN. Mit 760 Textabb. und 126 Tab., 835 S. Halle a. d. Saale: VEB W. Knapp. 1953. Geb. DM 37.—.

Die Vakuumtechnik ist seit langem nicht nur ein unentbehrliches Hilfsmittel der Forschung, sondern hat auch eine große Anzahl technisch bedeutungsvoller Verfahren ermöglicht. Eine Auswahl dieser technischen Verfahren behandelt das vorliegende Werk, das nunmehr in seiner dritten, gegenüber den vorangehenden wesentlich erweiterten Auflage erschienen ist. Nach einer kurzen Einführung in die physikalischen Grundlagen werden die folgenden Vakuumverfahren behandelt: Vakuumverdampfung, -destillation, -sublimation, -trocknung, -entgasung, -kühlung, -filtration, -extraktion, -kristallisation, -imprägnierung, -sintern, -schmelzen und -pressen. Neben einem Hinweis auf die verschiedenen Anwendungsgebiete dieser Verfahren und der durch die Verwendung des Vakuums erzielten Fortschritte z. B. in der chemischen, pharmazeutischen, metallurgischen und Elektroindustrie finden wir eine ausführliche Behandlung der Berechnungsgrundlagen sowie der für die genannten Verfahren geeigneten Geräte. Dabei wird auf schematische Darstellungen der verschiedenen Vakuumgeräte und ihrer konstruktiven Merkmale besonderer Wert gelegt und die praktische Ausführung durch Werkphotos illustriert. Das Buch wendet sich somit vor allem an den Praktiker und Betriebsingenieur. Wenn auch das spezielle Gebiet der Hochvakuum-Glas- und Labortechnik kaum berührt wird, so findet man doch auch für die Zwecke der Labortechnik eine Fülle von Tatsachen, z. B. über die verschiedenen Typen von mechanischen und Hochvakuum-pumpen, Vakuummetern, Vakuumdichtungen und-verbindungen, drehbar eingeführte Wellen und dergleichen. Das Buch wird somit allen denen, die entweder im Vakuumgerätebau oder in der Vakuumverfahrenstechnik tätig sind, wertvolle Hinweise geben. R. HAEFER, Graz.

Stress Waves in Solids. Von H. KOLSKY. (Monographs on the Physics and Chemistry of Materials. Herausgegeben von W. Jackson, H. Fröhlich und N. F. Mott.) Mit 46 Textabb., III Tafeln, X, 211 S. Oxford: At the Clarendon Press. 1953. Geb. 25 s. net.

Diese Darstellung der Ausbreitung von Wellenvorgängen in Festkörpern umfaßt in üblicher Weise diejenigen in unbegrenzten als auch in ein- und zweiseitig

begrenzten Medien. Das Werk besticht vor allem durch die Ausführlichkeit der Ableitungen als auch der beschriebenen neueren experimentellen Meßmethoden. Trotz einer stellenweisen Neigung zum Historischen verliert die Darstellung nicht an Übersicht. Erwähnt seien auch die mit den nicht ideal elastischen Medien befaßten Kapitel, in denen plastische und Stoßwellen besondere Berücksichtigung finden. Trotz eines ausführlich gehaltenen Autorenregisters kann eine Vollständigkeit desselben infolge der Vielzahl an Arbeiten auf diesem Gebiet nicht erwartet werden. So vermissen wir z. B. im allgemeinen theoretischen Teil eine Berücksichtigung der Abhandlung von A. SCHÖCH über Reflexion, Brechung und Beugung oder im besonderen Teil diejenige von TH. HÜTER, die ja das Problem der Schallfortpflanzung in Zylinderstäben im Großen zum Abschluß bringt. Zahlreiche Prinzipzeichnungen als auch einige photographische Abbildungen ergänzen das Werk vortrefflich und lassen den Gesamteindruck gewinnen, daß hier ein recht guter Einblick in dieses Teilgebiet der Festkörperphysik gegeben wurde.

E. CHRISTIAN, Graz.

Grundzüge der Meteorologie. Von W. KÖNIG. Zweite, ergänzte Auflage. (Mathematisch-physikalische Bibliothek: Reihe I. Herausgegeben von W. Lietzmann: Band 70.) Mit 21 Textabb., 71 S. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. 1953. DM 2.—.

Das vorliegende kleine Büchlein wendet sich hauptsächlich an Laienkreise und versteht es ganz ausgezeichnet, ohne viel Mathematik und Fachausdrücke, einen zwar knappen, aber doch vollständigen und alle wichtigen Fragen der modernen Meteorologie berührenden Überblick über das Gesamtgebiet dieses Wissenschaftszweiges zu geben. Die Ergänzungen gegenüber der ersten Auflage betreffen vor allem jene Ausweitungen der meteorologischen Forschung, die sich aus dem allmählichen Vorstoß in größere Höhen ergaben und die uns zum Beispiel in den täglichen Wetterkarten aus dem 500 mb-Niveau entgentreten oder in unseren neueren Erkenntnissen über die Temperaturverhältnisse in der Stratosphäre sichtbar werden. Schade ist, daß die Karte (Abb. 11), die die Druckverteilung für die ganze Erde erläutern soll, nicht auch im heute wohl ausschließlich verwendeten Millibar-Maß gezeichnet ist, zumal durch diese Doppelgeleisigkeit (die folgende Abbildung verwendet die Druckeinheit mb) der Anschluß zwischen den beiden Darstellungen erschwert wird. Die straffe Gliederung der einzelnen Kapitel, die die Vielfalt meteorologischer Forschung widerspiegeln, sowie auch die kursiv geschriebenen Worte, die die notwendige Aufmerksamkeit auf sich lenken, erleichtern sehr das verständnisvolle Lesen.

O. BURKARD, Graz.

Fernsehen. Vorträge über neuere Probleme der Fernsehtechnik. Veranstaltet vom Außeninstitut der Technischen Universität Berlin-Charlottenburg in Verbindung mit dem Elektrotechnischen Verein Berlin e. V. und der Deutschen Kinetischen Gesellschaft Berlin e. V. Unter Mitarbeit von W. BERNDT, W. HEIMANN, O. HILKE, F. KIRSCHSTEIN, W. KLEEN, H. KÖRNER, C. G. MAYER, F. RUDERT, W. T. RUNGE, F. SCHRÖTER, J. SCHUNACK, W. STÖHR, M. ULNER, R. URTEL, H. WERMANN, F. WINCKEL, H. ZSCHAU, herausgegeben von G. LEITHÄUSER und F. WINCKEL. Mit 346 Textabb., VIII, 437 S. Berlin—Göttingen—Heidelberg: Springer-Verlag. 1953. Geb. DM 42,—.

Das Werk bringt einen selten geschlossenen Überblick über alle Teilgebiete der Probleme, die bei der Fernsehtechnik zu lösen waren und zum Teil noch der Lösung harren. Die Namen der einzelnen Vortragenden bedeuten Repräsentanten und Pioniere der Fernsehtechnik im deutschen Raum. Den wohl gelungenen Rahmen für die Vorträge bilden die Ausführungen Prof. F. SCHRÖTERS, die in flüssiger

Form einen Rückblick und Ausblick dieses jüngsten Zweiges der Technik geben. Naturgemäß steht das Werk auf einem technisch hohen Niveau, so daß für das Verständnis eine bestimmte Mindestforderung an grundlegenden Kenntnissen vorausgesetzt wird. Besonders hervorzuheben ist die Gliederung des Buches, die den Fachmann für jedes einzelne Teilgebiet zu Worte kommen läßt. Im einzelnen: Die bei der CCIR-Tagung 1950 in London erzielte Annäherung der verschiedenen Standpunkte bezüglich der Normung stellten scheinbar ein Maximum des Erreichbaren dar. Noch immer bestehen vier voneinander abweichende Zeilenzahlen für die Bildauflösung. Wenn auch für den Heimempfang die französische Zeilen-norm mit 819 Zeilen als zweifellos überspitzte Forderung technisch und wirtschaftlich schwer vertretbar ist, so müßte über die Anwendung dieser Zeilenzahl für den Kinoempfang doch noch diskutiert werden. Die bei dieser Norm für ein von „Rastereindruck“ freies Empfängerbild notwendige Mindestentfernung beträgt immerhin $x = H/819 \cdot 2,5' = 1,7 H$. Dies bedeutet bei einem $H = 4$ m einen unausnutzbaren Raum von 7 m. Referent konnte bei einer Vorführung von 405-zeiligen Bildern bei einer Bildhöhe $H = 4$ m feststellen, daß unter Zugrundelegung der Formel $x = 3,5 H = 14$ m, entsprechend 405 Zeilen, dieser Abstand für einen klaren, rasterfreien Bildeindruck nicht genügt. Es scheint doch, daß der Wert von 2,5' für den Bildwinkel zu hoch angenommen wird. Im übrigen dürfte die Zeilenzahl in naher Zukunft nicht mehr diese Bedeutung haben, wenn es gelingt, einen Bildspeicher mit Überblendung (Differenzbildsystem) zu entwickeln. Es kann dann die Bildwechselfrequenz auf 16 pro Sekunde herabgesetzt werden, so daß bei der gleichen Frequenzbandbreite eine Bildauflösung in Zeilenzahlen möglich sein wird, die höher liegen können als 625. Der Vergrößerungsfaktor beträgt 1,25. Die Ausführungen über den vielumkämpften Kellfaktor, gegen dessen Optimalwert 1 manches spricht, können nur begrüßt werden, zumal er niemals ein absolutes Gütemaß für die Bildübertragung sein kann (siehe die englische Norm mit einem Kellfaktor = 1,11). Sehr klar und aufschlußreich sind die Ausführungen über die Probleme der Übertragung von Fernsehsignalen im Weitverkehr, bei denen die Richtstrahlverbindungen einen weiten Raum einnehmen. Dies ist um so erfreulicher, als ja letzten Endes die UKW-Verbindungen den Koaxialkabelverbindungen wirtschaftlich weitaus überlegen sind. Erstmalig wurde auch die Fernsehgroßprojektion nach dem Verfahren von Prof. FISCHER in Zürich mittels Eidophor gestreift. Dieser Entwicklung steht zweifellos noch eine große Zukunft bevor. Als Abschluß wird noch ein Referat des Repräsentanten der RCA in Europa gebracht, wobei auch das Farbfernsehen gestreift wird. In diesem Belange ist bezüglich der Methoden noch Vorsicht am Platze, da die Forschungen noch lange nicht zum Abschluß gelangt sind und Methoden, die vor kurzem noch als sehr aussichtsreich galten, heute bereits nicht mehr ganz aktuell sind. Abschließend kann das vorliegende Werk allen mit Problemen des Fernsehens befaßten Technikern und Naturwissenschaftlern nur aufs wärmste empfohlen werden.

G. GOBIET, Graz.

Reihenentwicklungen in der mathematischen Physik. Von J. LENSE. Dritte verbesserte Auflage. Mit 48 Textabb., 216 S. Berlin: W. de Gruyter & Co. 1953. DM 26,—.

Im Jahre 1947 erschien die zweite Auflage der „Reihenentwicklungen...“, die sich von der ersten Auflage 1933 durch die Umstellung und Umarbeitung einiger Abschnitte unterschied. Die Qualitäten des Werkes einerseits und die starke Aufnahmefähigkeit des Büchermarktes in den ersten Nachkriegsjahren andererseits machten schon 1953 eine dritte Auflage nötig, die von der zweiten jedoch nur in wenigen Details abweicht. In der vorliegenden Gestalt bringt das

Buch in den ersten fünf Abschnitten in knapper, aber ausgezeichneter Darstellungsweise das, was der theoretische Physiker über die speziellen Funktionen der mathematischen Physik wissen sollte. (Der abschließende sechste Abschnitt über LAMÉsche Funktionen dürfte ein weniger allgemeines Interesse finden.) Während aber zur Zeit der ersten Auflage das Werk sowohl als Nachschlage- als auch Lehrbuch diente, wird für Nachschlagezwecke immer mehr die eigens für diesen Zweck geschaffene Formelsammlung von MAGNUS und OBERHETTINGER benutzt, so daß das Buch nur mehr als Lehrbuch empfohlen werden kann, und zwar als Lehrbuch für „Fortgeschrittene“. Für Anfänger auf dem behandelten Gebiete ist das Buch deshalb nicht zum Selbststudium geeignet, weil es keine Aufgaben bringt. Und Aufgaben sind nun einmal der einzige Weg, einem Anfänger durch eine fortlaufende Überprüfung seiner Kenntnisse einen gediegenen Wissenserwerb zu gestatten. Dabei würde der Umfang des Werkes durch einige Aufgaben (mit Lösungen, jedoch ohne Lösungsgang) gewiß nur um wenige Seiten zunehmen, was durchaus zu vertreten wäre. Sehr oft wird auf frühere Formeln zurückverwiesen, und zwar etwa in der Form I,2,3), was ausführlich Abschnitt I, Ziffer 2, Gleichung 3 bedeuten soll. Der Leser muß dann im allgemeinen im Inhaltsverzeichnis nachsehen, auf welchen Seiten das Zitat stehen kann und diese hierauf aufschlagen; ein auf die Dauer gewiß nicht sehr angenehmes Verfahren. Auf die Seitennumerierung hingegen bezieht sich lediglich das Namen- und Sachverzeichnis. Der Referent schlägt vor, daß die hier ziemlich unwichtigen Seitenzahlen, die jetzt in den unteren äußeren Ecken der Seiten stehen, nach unten innen verlegt werden, während unten außen Kapitel, Ziffer und erste, bzw. letzte Gleichung fortlaufend angegeben werden, z. B. (I,2,3). Derartige Anordnungen werden bei vielen Büchern ähnlichen Aufbaues bekanntlich mit Vorteil verwendet. Die Verweisungen stören dann bei der Lektüre nicht mehr allzu sehr.

K. STUCHLIK, Graz.

Spezielle Mineralogie auf geochemischer Grundlage. Mit einem Anhang „Ein kristallchemisches Mineralsystem“. Von F. MACHATSCHKI. Mit 229 Textabb., VII, 378 S. Wien: Springer-Verlag. 1953.

Geb. S 215.—, sfr. 37.—, \$ 8.60, DM 36.—.

Die Einteilung des umfangreichen Stoffes erfolgt nach genetischen Gesichtspunkten. So behandeln die ersten drei Hauptteile die primären, die Sedimentations- und die metamorphen Mineralien. Wegen ihrer besonderen praktischen Bedeutung wurde den Erzmineraleien im engeren Sinne ein vierter, selbständiger Hauptteil gewidmet. Die modernen kristallchemischen Formeln haben überall die früher verwendeten valenzchemischen verdrängt und enthalten nun die Koordinationszahlen, die Verkettungsdimensionen und das Kristallsystem. Damit wird aus dem Aufbau soviel in die Formel hineingelegt, als möglich ist. Das Buch weist aber auch in der Anlage kristallchemische Züge auf, insofern als alle isomorphen Mineralien gleich dort mitbesprochen werden, wo das erste im geochemischen Ablauf auftritt, trotzdem sie eventuell anderen Entstehungsphasen angehören.

Dies bedeutet einen Kompromiß zwischen durchgehender Systematik und der Notwendigkeit raumvergeudender Wiederholungen.

Das geochemische Gerüst bringt es mit sich, daß die speziellen Mineralbeschreibungen immer wieder durch allgemeinere Kapitel aufgelockert sind, wie überhaupt in den Text zahlreiche lagerstättenkundliche und wirtschaftlich-technische Einschaltungen gemacht sind, was das Lesen des Buches besonders kurzweilig gestaltet. Die gebräuchlichsten Begriffe aus verwandten Wissensgebieten werden in diesen eingestreuten Bemerkungen kurz erklärt, so daß als

Vorkenntnis nur das vom selben Verfasser erschienene Büchlein: „Grundlagen der allgemeinen Mineralogie und Kristallchemie“, notwendig ist.

Um dem Mangel an Strenge im Text zu begegnen, wird als Anhang ein kristall-chemisches Mineralsystem beigelegt, das alle wichtigeren Mineralien mit ihren Formeln und, soweit bis jetzt bekannt, strukturellen und kristallographischen Daten enthält.

Die souveräne Beherrschung des Fachgebietes und vor allem seiner Hilfswissenschaften befähigte den Autor, ein Lehrbuch zu schreiben, wie man es sich schon lange gewünscht hat.

H. STIPPEL, Graz.

Data for X-Ray Analysis. Band I: Charts for Solution of Bragg's Equation (d versus Θ and 2Θ). Von W. PARRISH und B. W. IRWIN. VII, 100 S. Band II: Tables for Computing the Lattice Constant of Cubic Crystals. Von W. PARRISH, M. G. ECKSTEIN und B. W. IRWIN. VII, 81 S. Eindhoven: Philips' Technical Library. 1953.

Die Sammlung „Data for X-Ray Analysis“ macht es sich zum Ziel, Tabellen und Diagramme zu veröffentlichen, die in Ergänzung zu den bekannten Standardwerken (z. B. Internationale Tabellen zur Bestimmung von Kristallstrukturen, bzw. International Tables for X-Ray Crystallography) die notwendige Rechenarbeit möglichst vereinfachen sollen.

Der erste Band bringt die Auswertung des BRAGGSchen Gesetzes in Form von Diagrammen, die für die K_α -Strahlung von Molybdän, Kupfer, Kobalt, Eisen und Chrom es ermöglichen, den Wert für d direkt abzulesen. Dabei ist für niedere Werte von Θ der Mittelwert für K_α berücksichtigt. Im mittleren Bereich von Θ gehen der Mittelwert für K_α , K_{α_1} und K_{α_2} in die Diagramme ein. Für höhere Werte von Θ sind die Kurven nur für K_{α_1} und K_{α_2} gezeichnet. Die Diagramme sind sicher außerordentlich handlich und sind vor allem für eine rasche Identifikation durch Pulveraufnahmen geeignet. Die meisten bisherigen Publikationen dieser Art erschienen in Tabellenform.

Der zweite Band enthält Tabellen für eine genaue Bestimmung der Gitterkonstanten von kubischen Kristallen. In Tabellen sind die Werte von $\sqrt{N} \cdot \lambda/2$ für K_{α_1} , K_{α_2} und K_{β_1} von Kupfer, Nickel, Kobalt, Eisen und Chrom angegeben ($N = h^2 + k^2 + l^2$). Zwei weitere Tabellen zur Extrapolation des exakten Wertes der Gitterkonstante sind beigegeben. Diese Tabellen des zweiten Bandes erleichtern die notwendige Rechenarbeit zur Bestimmung genauer Gitterkonstanten kubischer Kristalle ganz bedeutend. Als Abschluß des Bandes findet sich noch eine Tabelle über die Gitterkonstanten kubischer Kristalle nach L. K. FREVEL.

H. HERITSCH, Graz.

Mechanik, Akustik und Wärmelehre. Von R. W. POHL. Zwölfte, verbesserte und ergänzte Auflage. („Einführung in die Physik“: Band I.) Mit 575 Textabb., VIII, 345 S. Berlin—Göttingen—Heidelberg: Springer-Verlag. 1953. Geb. DM 23,80.

Ein Rezensent hat einmal geschrieben, daß das Studium der POHLSchen „Einführung in die Physik“ den Besuch einer Experimentalvorlesung erübrige. Natürlich ist eine solche Beurteilung nicht wörtlich zu nehmen, denn das geschriebene Wort kann nie das Miterleben eines Experimentes ersetzen. Aber sie drückt doch sehr hübsch das aus, was das POHLSche Werk bietet: Eine erstklassige Einführung in die Hochschulphysik an Hand von sauber beschriebenen Experimenten, die durch viele Abbildungen treffend erläutert werden. Wenn auch das Stoffgebiet des vorliegenden ersten Bandes — Mechanik, Akustik und Wärmelehre — seit Erscheinen der ersten Auflage im Jahre 1930 eine geruhsamere Weiterentwicklung

gefunden hat als andere Teile der Physik, so hat der Verfasser doch die zwölfte Auflage wiederum, und zwar vor allem in methodischer Hinsicht, umgearbeitet. Einige modernere Disziplinen, die sich durch einfachere Versuche weniger leicht erläutern lassen, wie etwa die Plastizität oder die Gasdynamik, sind leider nur gestreift, doch bietet das Werk immerhin genug an Grundlagen, um ihre einfacheren Gesetze an Hand anderer Darstellungen rasch begreifen zu können.

Das Buch benutzt nur wenige mathematische Hilfsmittel, doch hat sich der Verfasser bemüht, Vektorgleichungen in der Schreibweise der Vektoralgebra zu bringen (also z. B. für das Vektorprodukt ein Kreuz zwischen die Vektoren zu setzen), und zwar so, daß sie (im Sinne der Beispiele des Buches) von Anfängern auch als Betragsgleichungen gelesen werden können (wobei dann für das Vektorprodukt das Kreuz als „Malzeichen“ aufzufassen ist). Leider wurde diese Absicht nur unbefriedigend verwirklicht, weil auch reine Betragsgleichungen als Vektorgleichungen geschrieben werden. Zum Beispiel wird auf S. 113 ein Moment proportional einer ganz anders gerichteten Kraft gesetzt. Es gibt hier nur eine Möglichkeit zur Bildung einer klaren Schreibweise: Die Betragsgleichungen als Betragsgleichungen und die Vektorgleichungen als Vektorgleichungen zu schreiben, wobei dann die Vektorgleichungen von Unkundigen der Vektoralgebra einfach als Betragsgleichungen zu lesen wären (natürlich nur für die Beispiele des POHLschen Buches).

K. STUCHLIK, Graz.

Verfärbung und Lumineszenz. Beiträge zur Mineralphysik. Von K. PRZIBRAM. Mit 69 Textabb., XIII, 275 S. Wien: Springer-Verlag. 1953. Geb. S 210,—, sfr. 35,50, \$ 8,25, DM 34,70.

Das vorliegende Werk betrifft eines der Forschungsgebiete, auf denen Mineralogen und Physiker einander begegnen und zusammenwirken, eine Wechselbeziehung, die hier spezifisch österreichische Voraussetzungen aufweist. Die Frage nach der Tragweite radioaktiver Strahlungseinflüsse für die Färbung natürlicher Mineralien sowie die Untersuchung der Eigenschaften durch radioaktive und verwandte Bestrahlungsarten erzielbarer künstlicher Färbungen sind untrennbar verknüpft mit der Förderung radioaktiver Forschungsmethoden, welche in Verbindung mit den nordböhmisches Bodenschätzen, vor allem durch das Institut für Radiumforschung der Wiener Akademie der Wissenschaften geleistet wurde. Den mineralogischen Aspekt des Problems verdankt man CORNELIUS DOELTER mit seinem 1910 erschienenen Buch „Das Radium und die Farben“. Die physikalische Bearbeitung ist nunmehr, insbesondere durch eine große Zahl von Einzeluntersuchungen des Verfassers und zahlreicher Mitarbeiter am Institut für Radiumforschung, soweit fortgeschritten, daß eine abrundende Darstellung des Gebietes versucht werden konnte. Obwohl der Verfasser möglichste Vollständigkeit in der Würdigung fremder Leistungen beabsichtigt hat, bekennt er freimütig die via facti erfolgte stärkere Berücksichtigung der Arbeiten seiner Wiener Schule und verweist auf manche Schwierigkeit für die bis Ende 1952 angestrebte Literaturzusammenstellung. Wer sich fruchtbarer Anregung durch Fragestellung und Ergebnisse dieser Wiener Arbeiten verpflichtet weiß, wird darin keinen Nachteil erblicken, sondern deren handliche Zusammenfassung mit besonderer Genugtuung und Dankbarkeit begrüßen.

Wegen ihrer Abhängigkeit von der chemischen, thermischen und mechanischen Vorgeschichte gehören Verfärbung und Lumineszenz zu den strukturempfindlichen Eigenschaften der Festkörper. Eine vollständige Beschreibung aller dieser Zusammenhänge als Selbstzweck, soweit sie heute bereits gegeben werden kann, würde sich auf dem Gesamtbereich dieser empfindlichen Eigenschaften und ihre strukturellen Voraussetzungen gründen, wie z. B. die Fragen des realen Kristall-

wachstums und der Rekristallisation in Abhängigkeit von der Art der chemischen Bindung und von der Gegenwart von Fremdstoffen, die thermische Beweglichkeit von Eigen- und Fremdbausteinen, Elektronen und Gitterlücken aller Art, die Elektronenbindung an Lücken und Fremdbausteinen, den Mechanismus der plastischen Verformung. Als Grundlage für eine Beurteilung der auf radioaktiven Wirkungen beruhenden Färbungs- und Lumineszenz-Eigenschaften natürlicher Mineralien war eine umfassende Kenntnis dieser in vollem Ausbau begriffenen Kapitel der Kristallphysik nicht erforderlich. Der Verfasser hat daher in der vorbereitenden ersten Hälfte des Werkes (110 Seiten) die mit künstlichen Strahlenquellen aller Art untersuchten Verfärbungs- und Lumineszenz-Eigenschaften insbesondere der Alkalihalogenide wiedergegeben und jene prinzipiellen Fragen nur dort berührt, wo für das empirisch-phänomenologische Stoffverhalten bestimmte Deutungsmöglichkeiten zu erörtern waren. Die den natürlichen Mineralfarben gewidmete zweite Hälfte (124 Seiten) behandelt in den speziellen Teilen das natürliche gefärbte Steinsalz (40 Seiten), den Fluorit (45 Seiten), ferner Oxyde, Karbonate, Sulfate, Nitrate und Phosphate, Silikate und den Diamant. Das Literaturverzeichnis umfaßt mehr als 950 Einzelnachweise (38 Seiten); ihm ist ein kurzes Sachverzeichnis angefügt.

Das Buch ist klar und verständlich geschrieben, Ausstattung und Abbildungen sind ausgezeichnet. Es darf daher Kristallphysikern, Mineralogen und Petrographen wärmstens empfohlen werden. Seine Zusammenfassung des gegenwärtigen Wissens um den radioaktiven Ursprung von Mineralfarben und sein Literaturverzeichnis sind schlechthin unentbehrlich.

A. SMEKAL, Graz.

Reports on Progress in Physics. Band XVI (1953). Herausgegeben von A. C. STICKLAND. Mit Textabb., IV, 407 S. London: The Physical Society. 1953. Geb. £ 2 10s net.

Der Band 1953 enthält eine Reihe ausgezeichneten Artikel, von denen die Mehrzahl auf dasselbe Grundthema, die Erforschung des festen Zustandes, abgestimmt ist.

„Neutron Diffraction“ von G. E. BACON und K. LONSDALE bringt die erste zusammenfassende Darstellung eines der jüngsten Zweige der Strukturforschung. Die Methode weist große Ähnlichkeit mit dem Röntgenstrahlverfahren auf, dessen Ergebnisse parallellaufend zitiert werden, und bildet eine ideale Ergänzung dazu, da die Röntgenstrahlen hauptsächlich von den Hüllenelektronen gestreut werden, während die Neutronenstreuung meistens nur nuklearen Ursprungs ist. Die theoretische Behandlung schließt sich an die BREIT-WIGNERSche Dispersionsformel an und begnügt sich mit der Angabe der Resultate. Vergleiche mit der Elektronenstreuung, die in neuester Zeit auch zur Strukturermittlung herangezogen wurde, fehlen, wären aber vor allem bei Fällen magnetischer Neutronenstreuung interessant.

Der zweite Artikel befaßt sich mit dem Zusammenhang zwischen physikalischen Eigenschaften und der Anordnung der Atome in Kristallen. Bekanntes über magnetische, optische, piezoelektrische und elastische Eigenschaften wird prägnant zum Ausdruck gebracht. Vor allem bei Kristallen niedriger Symmetrie kann von einer theoretischen Klärung des in Frage stehenden Zusammenhanges nicht die Rede sein, und der Autor, W. A. WOOSTER, schlägt vor, zunächst aus dem Verhalten einer großen Zahl von Kristallen aller Symmetrieklassen allgemeine empirische Beziehungen zu erschließen. Diese Regeln sollen dann die Leitlinien für zukünftige theoretische Entwicklungen sein.

Der Bericht hängt über das Studium der optischen Eigenschaften eng mit dem folgenden „RAMAN Effect in Solids“ von A. C. MENZIES und über die magnetischen

Eigenschaften mit dem übernächsten „Paramagnetic Resonance“ von B. BLEANEY und K. W. H. STEVENS zusammen. Der Artikel über den RAMAN-Effekt wird dem Fachmann die Möglichkeit geben, die riesige Zahl von Veröffentlichungen auf diesem Gebiet zu überschauen, ist aber auch für das Verständnis des Effektes von großem Wert. Eine sehr ansprechende Zusammenfassung theoretischer und experimenteller Ergebnisse stellt der oben erwähnte Bericht über paramagnetische Resonanz dar. Auf die Ergebnisse einer exakten Theorie des elektrischen Feldes im Kristall wird nicht eingegangen, sondern die Autoren hielten es für günstiger, mit einer Spin-HAMILTON-Funktion zu arbeiten, um den Bericht leichter lesbar zu gestalten.

Von großem Interesse vor allem für den forschenden Schwachstromtechniker dürfte die Zusammenstellung über „Semiconductor Circuit Elements“ von J. S. BLAKEMORE, A. E. DE BARR und J. B. GUNN sein, da sie vieles Wissenswerte über die physikalische Basis der heute sehr viel verwendeten Halbleitereigenschaften der Kristalle (Kristallgleichrichter, Transistoren, Photozellen usw.) bringt. Es werden hauptsächlich diejenigen Eigenschaften diskutiert, die auf dem gleichzeitigen Vorhandensein von Ladungsträgern beiderlei Vorzeichens beruhen. Die Bändertheorie der Festkörper in Vereinigung mit dem PAULISCHEN Ausschlußprinzip führt zu einem zwanglosen Verständnis der betrachteten Effekte. Die Abhandlungen über elektrische Entladung (F. L. JONES) und Kosmologie (W. H. McCREA) dürften ungeachtet ihrer Qualitäten nur den Spezialisten interessieren. Von allgemeinem Interesse ist jedoch „Fluctuation Theory in Physical Measurements“ von C. W. McCOMBIE. An zahlreichen Beispielen, vor allem elektromagnetischer Natur, wird gezeigt, wie man möglichst elementar zu einer Fehlerbestimmung kommen kann, wenn der Fehler als Fluktuation in den Meßvorgang eingeht. Der Begriff der Korrelationsfunktion wird an einem einfachen Beispiel erklärt und die mathematischen und physikalischen Grundlagen der Methode ausführlich dargelegt.

Schließlich folgt noch eine Beschreibung der Eigenschaften der neuen instabilen Teilchen in der kosmischen Strahlung, die Massen zwischen 400 und 2200 mal der des Elektrons haben. In die ziemlich komplizierten Verhältnisse bringen die Autoren G. D. ROCHESTER und C. C. BUTLER durch diese zusammenfassende Behandlung eine wenigstens qualitative Ordnung, wenn auch die theoretische Klärung der vielen damit verbundenen Fragen vielleicht noch lange fehlen wird.

Ein besonderer Vorzug der Reports sind wie immer die ausführlichen Literaturverzeichnisse am Ende jeder Abhandlung.

H. STIPPEL, Graz.

Technical Aspects of Sound. Herausgegeben von E. G. RICHARDSON. Band I: Sonic Range and Airborne Sound. Mit 294 Textabb., XVIII 544 S. Amsterdam—Houston—London—New York: Elsevier Publishing Company. 1953. Geb. 70 s.

Was BERGMANNs „Der Ultraschall“ auf dem Gebiete des Ultraschalls darstellt, ist dieses Buch auf dem Gebiete des Hörschalls. Zum Unterschied von ersterem ist „Technical Aspects of Sound“ eine Gemeinschaftsarbeit von namhaften Wissenschaftlern, von denen jeder „sein“ Kapitel bearbeitet. Ohne die Individualität des Einzelnen einzuschränken, hat RICHARDSON die Beiträge zu einem harmonischen Ganzen zusammengefügt, nicht zuletzt durch die von ihm stammende Einführung, die die theoretischen Grundlagen in der Bezeichnungsweise bringt, die in allen anderen Kapiteln beibehalten wird. Die Auswahl des Stoffes und die Art, wie er gebracht wird, ist unbedingt positiv zu beurteilen. Da es bei der Fülle des Stoffes im Rahmen eines Buches unmöglich ist, bis ins Detail zu gehen, ist jedem Kapitel ein umfangreiches Literaturverzeichnis angeschlossen. Den Raumakustiker und Architekten wird eine Tabelle über den Absorptionskoeffizienten von den in Europa

hergestellten Baumaterialien mit Angabe der Herstellerfirmen besonders interessieren.

Abschließend sei noch bemerkt, daß der zweite Band, dessen Erscheinen für 1954 in Aussicht gestellt wurde, dem Ultraschall gewidmet sein wird.

E. EISENZOPF, Graz.

Einführung in die Kernphysik. Von W. RIEZLER. Fünfte, erweiterte Auflage. Mit 123 Textabb., 15 Abb. auf Tafeln und einer Farbtafel, 332 S. München: R. Oldenbourg. 1953. Geb. DM 24,—.

Das Werk, das durch ständige Neuauflagen mit der stürmischen Entwicklung der Kernphysik Schritt hält, wird nach wie vor der schwierigen Aufgabe gerecht, dieses so wichtige Teilgebiet der Physik fast ohne jede Mathematik und doch in möglichst strenger Weise darzustellen. Der Umfang des Buches könnte allerdings kleiner sein, da es zahlreiche Wiederholungen gibt. Aber andererseits tragen gerade diese Wiederholungen dazu bei, die einzelnen Kapitel voneinander unabhängig zu machen, was auch seine Vorteile hat. Das Fehlen mathematischer Hilfsmittel erschwert natürlich die Übersicht über den gebotenen Stoff. Viele Leser würden es daher begrüßen, wenn der Inhalt der einzelnen Kapitel jeweils an deren Ende (oder gemeinsam im Anhang des Buches) in einer schematischen Blockschizze zusammengefaßt werden würde. Derartige Skizzen sind z. B. in manchen Zweigen der Chemie sehr beliebt und für eine rasche Rekapitulation sicherlich von Nutzen.

Die Flüssigkeit der Sprache, gepaart mit Exaktheit, und die zahlreichen neuesten Zahlenwerte, Abbildungen usw. empfehlen das Buch von selbst. Der Autor kann des Dankes eines weiten Leserkreises für seine Mühe gewiß sein. K. STUCHLIK, Graz.

Wahrheit und Irrtum in der Relativitätstheorie. Eine gemeinverständliche logisch-erkenntnistheoretische Untersuchung. Von K. SAPPER. Mit 9 Textabb., 50 S. Graz: Im Selbstverlag des Verfassers. 1952 S 16.50.

Diese mehrfach urgierte Besprechung kann im Rahmen einer physikalischen Fachzeitschrift insofern gerechtfertigt werden, als die Broschüre dem Physiker in besonders krasser Form die völlige Verkenntnis physikalischer Methoden und ihrer Resultate bei einzelnen Vertretern der Naturphilosophie demonstriert, trotzdem diese unserer Wissenschaft nicht allzuferne stehen sollten.

Ohne auf jede Einzelheit eingehen zu können, seien folgende Proben auszugsweise mitgeteilt. Der Verfasser hat von dem fundamentalen Unterschied zwischen Effekten erster Ordnung (klassische Elektronentheorie) und solchen zweiter Ordnung, die erst ein experimentum crucis der speziellen Relativitätstheorie bilden können, überhaupt keine Notiz genommen. Er stellt also die Aberration auf dieselbe Stufe wie den MICHELSON-Versuch. Diese Unkenntnis des eigentlichen Inhaltes der speziellen Relativitätstheorie spiegelt sich schon auf den Seiten über das Relativitätsprinzip der klassischen Mechanik wieder, das später nirgends auf elektromagnetische Vorgänge zum Relativitätsprinzip im engeren Sinne erweitert wird. Statt den Feldbegriff entsprechend zu berücksichtigen, wird von „Lichtbewegung“ gesprochen, was vom Laienpublikum, das die „gemeinverständliche“ Broschüre belehren will, mißverstanden werden kann und wohl auch wird. Daher ist es kein Wunder, wenn der Autor seine laienhaften Ausführungen dann schließlich in den Satz gipfeln läßt: „Die relativistische Behauptung (!), daß sich die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit aus dem Relativitätspostulat erschließen lasse, ist einer der handgreiflichsten und unbegreiflichsten Irrtümer der Relativitätstheorie.“ Er schließt dies aus der bekannten Diskrepanz zwischen klassischem Additionstheorem der Geschwindigkeiten und der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit. Der Autor scheut sich also nicht die Schlußfolgerungen aus dem *klassischen* Relativitätsprinzip der Relativitätstheorie im engeren und eigent-

lichen Sinne als Irrtum anzulasten, obwohl letztere ja gerade erst auf Grund jener Diskrepanzen geschaffen wurde!! Um es jüngeren Lesern in einer Analogie besonders deutlich zu machen: Der Autor legt einem Kritiker einer falschen Behauptung gerade diese in den Mund und stellt dann einen „unbegreiflichen“ Irrtum fest. Welche Ironie in dem der Broschüre vorangestellten Motto „Errare humanum“ liegt, schein dem Verfasser gar nicht zum Bewußtsein gekommen zu sein. Bei der Diskussion der so beliebten Zeitdilatation steigert sich die soeben zum Ausdruck gekommene Inkonsequenz des Verfassers zu der Schlußfolgerung, eine Uhr müsse bei der üblichen (und dynamisch begründeten!) Interpretation der LORENTZ-Transformation gleichzeitig zwei Zeigerstellungen aufweisen. Dieses Kunststück kann natürlich nur so zustande kommen, daß man die Konzeption einer absoluten Zeit durch eine Hintertüre in die Diskussion hereinschmuggelt. Da der Referent nicht voraussetzen kann, daß der Leser weiteren Proben auch eine heitere Seite abzugewinnen vermag, soll er nicht weiter behelligt werden.

Jedenfalls wird man folgenden Zeilen, die in den „Physikalischen Blättern“ (1953/4. Heft) aus ähnlichem Anlaß erschienen sind, einige Aktualität nicht absprechen können: „Und was die Holzwege der Physik betrifft: Knüppeldämme sind in unerkundetem und sumpfigem Gelände die einzige Sicherheit. Wer über sie im Anflug von Übermut hinweg tanzt, versinkt nach kurzem Geschrei im Moore der Vergessenheit. Das größere Publikum aber sollte sich hüten, in diesen Leichtfertigen verkannte Genies und Opfer eines Irrtums der Wissenschaft zu sehen.“

L. BREITENHUBER, Graz.

Entwicklung im Weltall. Von H. SIEDENTOPF. Mit 1 Textabb. und 18 Abb. auf Tafeln, 48 S. München: R. Oldenbourg. 1953. DM 1,80.

Der Physiker hat heute im allgemeinen nicht viel Zeit, sich mit kosmologischen Problemen zu befassen. Daher sind ihm sowohl die Beobachtungsergebnisse als auch die theoretischen Ansätze meist wenig vertraut. Dabei ist etwa die Theorie nicht schwerer zu verstehen als in den verschiedenen Gebieten der Physik. Zum Beispiel sind die mathematischen Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie durchaus nicht so schwer erlernbar, wie oft angenommen wird. Aber ihre praktische Verwendbarkeit ist derzeit so gering, daß sie eben nur den Spezialisten vertraut sind.

Man kann dem Verfasser Dank zollen, daß er in der vorliegenden allgemeinverständlichen Arbeit sowohl die Beobachtungen als auch die Theorien von einem vorurteilslosen Standpunkt aus beschreibt. Der Physiker wird das Büchlein als angenehmen Überblick über ein sicherlich nicht uninteressantes Randgebiet seiner Wissenschaft gerne zur Hand nehmen.

K. STUHLIK, Graz.

Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker. Von R. ZURMÜHL. Mit 114 Textabb., XI, 481 S. Berlin—Göttingen—Heidelberg: Springer-Verlag. 1953. Geb. DM 28,50.

Dieses Werk gibt dem Praktiker das, was dieser über die theoretischen Grundlagen hinaus benötigt um eine Rechnung wirklich durchzuführen. Die Begriffe und Verfahren werden gut verständlich erklärt und stets an durchgerechneten Beispielen vorgeführt; dabei sind die einzelnen Abschnitte möglichst unabhängig gehalten, so daß man sich rasch einlesen kann. Von den Grundlagen werden die komplexen Zahlen etwas ausführlicher, Rechenschieber und Rechenmaschinen nur ganz kurz besprochen. Dann folgen nicht-lineare Gleichungen, lineare Gleichungssysteme, Matrizen, Eigenwerte, Interpolation und numerische Integration, Ausgleichsrechnung, Darstellung willkürlicher Funktionen und gewöhnliche Differentialgleichungen (Anfangs- und Eigenwertprobleme); partielle Differentialgleichungen werden nicht behandelt. Das ausgezeichnet geschriebene Werk erfüllt völlig seinen Zweck und ist jedem Praktiker nur zu empfehlen.

H. HORNICH, Graz.

Abbildungen: Sie müssen, wenn auch nur skizziert, doch so weit ausgeführt sein, daß für den dem Thema fernstehenden Verlagszeichner keine Unklarheiten bestehen. Jede Zeichnung ist zu beschriften; die Beschriftung soll das Lesen der Zeichnung auch ohne langes Suchen im Text ermöglichen. Sie ist, als Beschriftung der Abb. Nr. . . . kenntlich gemacht, an der gewünschten Stelle des Textes einzufügen. Die Zeichenvorlage ist der Abhandlung auf gesondertem Blatt, das zwecks Vermeidung von lästigen Verwechslungen durch Autorennamen und Arbeitstitel gekennzeichnet sein soll, beizulegen. Man vergesse nicht, daß Figurenwiedergabe und Textherstellung zwei gesonderte Arbeitsgänge sind, die erst nach der ersten Korrektur zusammenlaufen.

Formeln: Der Setzer versteht im allgemeinen nichts vom Sinn der Formeln und hält sich genau an die Vorlage. Korrekturen an gesetzten Formeln bedingen einen unverhältnismäßig großen Aufwand an Mehrarbeit. Unverhältnismäßig in bezug auf die geringe Mehrarbeit, die der Verfasser hat, wenn er Buchstaben und Formelzeichen deutlich und unmißverständlich schreibt, bzw. malt. — Die Formelzeichen sollen womöglich den AEF-Normen entsprechen oder den in den beiden Handbüchern der Physik verwendeten Zeichen angeglichen sein. — Längere mathematische Ableitungen sollen gegebenenfalls in einem mathematischen Anhang zusammengestellt werden; soweit gekürzt, daß der Fachmann den Rechengang übersehen und eventuell kontrollieren kann. Im Text ist raumsparende Schreibweise anzu-

wenden, also $(a + b)/c$ statt $\frac{a+b}{c}$ oder $e^{-E/kT}$ statt $e^{-\frac{E}{kT}}$.

Zitate ebenso wie Anmerkungen werden als Fußnoten mit durch die Arbeit fortlaufender Numerierung (zur Erleichterung der Rückverweisung, bzw. zur Vermeidung unnötiger Wiederholungen) gebracht. Als Zitatmuster (vergleiche die Handbücher oder die S.-B. der Akademie): A. J. DEMPSTER, Nature 136, 180 (1935).

Autorenkorrekturen, das heißt nachträgliche Textänderungen, werden, soweit sie 10% der Satz-kosten überschreiten, den Verfassern in Rechnung gestellt.

Herausgeber, Schriftleitung und Verlag

Bei der Schriftleitung sind folgende Beiträge eingelangt:

(Änderungen in der Reihenfolge bei der Veröffentlichung müssen aus technischen Gründen vorbehalten bleiben.)

- Tomiser, J.** Eigendruckverbreiterung der Kaliumlinien 7664,91 ÅE und 7698,98 ÅE und ihrer ZEEMAN-Komponente in Absorption . 9. XI. 1953
- Tomiser, J.** Eigendruckverbreiterung der Rubidiumlinien $\lambda = 7800,23$ ÅE und $\lambda = 7947,60$ ÅE und ihrer ZEEMAN-Komponente in Absorption 9. XI. 1953
- Harmuth, H.** Die Ausnützung gekrümmter Kennlinien für die höheren Grundrechnungsarten in elektronischen Rechenmaschinen 18. XI. 1953
- Florian, A. und P. Urban.** Matricelemente und Integrale für das Schalenmodell der leichten Kerne 1. XII. 1953
- Cap, F. und W. Röver.** Lichtwege in inhomogenen, absorbierenden, isotropen Medien 21. XII. 1953
- Mitter, H. und P. Urban.** Zur Streuung schneller Elektronen. III. Strahlungskorrekturen 10. I. 1954
- Krzywoblocki, M. Z. v.** On the Stability of BÉNARD-KÁRMÁN Vortex Street in Compressible Fluids. II. 27. I. 1954

Soeben erschienen:

Wärmespannungen infolge stationärer Temperaturfelder

Von

Dipl. Ing. Dr. techn. **Ernst Melan** und Dipl. Ing. Dr. techn. **Heinz Parkus**
o. Professor an der Technischen Hochschule in Wien, wirkl. Mitglied der Österreichischen Akademie der Wissenschaften
Professor am Michigan State College, East-Lansing Michigan, USA.

Mit 30 Textabbildungen. V, 114 Seiten. 1953
Ganzleinen S 110.—, DM 18.50, \$ 4.40, sfr. 18.90

Die Lehrbücher der Elastizitätstheorie und Festigkeitslehre widmen den Wärmespannungen, wenn überhaupt, nur verhältnismäßig wenig Raum und beschränken sich im allgemeinen auf die Behandlung des einen oder anderen besonderen Problems. Diese Lücke zu schließen ist der Zweck des angekündigten Buches, in dem die Verfasser die Theorie der Wärmespannungen von einem einheitlichen Standpunkt aus behandeln. Beim Leser werden jene Kenntnisse vorausgesetzt, wie sie in den Hauptvorlesungen in Mathematik und Elastizitätstheorie an den Technischen Hochschulen erworben werden. In dem jetzt erscheinenden Buch sind die stationären Probleme unter der Annahme der unbeschränkten Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes behandelt. Es ist beabsichtigt, die quasi-stationären, zeitlich veränderlichen und nichtlinearen Probleme in einem weiteren Buch zu behandeln.

Bau und Bildung der Kristalle

Die Architektonik der stofflichen Welt

Von

Prof. Dr. **Franz Raaz** und Prof. Dr. **Alexander Köhler**
Mineralog.-petrogr. Institut der Universität Wien
Institut für angewandte Mineralogie und Petrographie der Technischen Hochschule Wien

Mit 166 Textabbildungen. V, 185 Seiten. 1953
Ganzleinen S 96.—, DM 18.—, \$ 4.30, sfr. 18.50

Das heute so wichtige Gebiet der Mineralogie und Kristallographie wird in der Allgemeinheit unverdienterweise viel zu wenig beachtet. Hinter der ästhetischen Schönheit der Kristalle verbirgt sich aber ein Zusammenhang zwischen Materie und forschendem Geist, wie er enger in keiner Wissenschaft geknüpft ist, als eben bei den Kristallen mit ihren regelmäßigen, oft wie „geschliffen“ erscheinenden Flächen und ihrem nach strengen Symmetriegesetzen erfolgenden Aufbau. Diese Regelmäßigkeit, die schon in unserer **makroskopischen** Welt dem Laien oft Bewunderung abnötigt, setzt sich nun in den **Mikrobereichen** der Atome fort, die uns **MAX VON LAUE** 1912 mit seinem Fundamentalversuch mittels der Röntgenstrahlen erschloß.

Das bedeutete aber nur den Auftakt zur modernen Strukturforschung, die uns heute sowohl exakte Vorstellungen über die Art und den räumlichen Aufbau chemischer Verbindungen vermittelt als auch hinüberleitet in das Gebiet der Festkörperphysik, einen Brennpunkt physikalischer Forschung der Gegenwart. Viele der physikalischen Eigenschaften von Kristallen hat sich der Mensch inzwischen zunutze gemacht und die heutige Technik ist ohne diese Anwendungen nicht mehr zu denken.

Daher haben die Verfasser, beide Professoren für Mineralogie (Universität und T. H.), es sich zur Aufgabe gemacht, in dem vorliegenden Buch diesen „Alldurchdringenden Geist“ der Kristallkunde dem Leser nahezubringen. Wenn dies Buch auch kein Lehr- oder Handbuch ist, so bietet es doch eine gewisse Abrundung des Wissensstoffes, und es wurden auch Fragen aus spezielleren Teilgebieten, wie **Edelsteinkunde**, **Geochemie**, **Lagerstättenlehre** und **Meteoritenkunde**, herangezogen. Die Anschaulichkeit des Stoffes wird durchwegs unterstützt durch eine große Anzahl sorgfältig ausgewählter Abbildungen.

Zu beziehen durch jede Buchhandlung